Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
Lösungen zum 10. Übungsblatt für den 12. Dezember 2011

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

6. Welche der folgenden Tripel sind Ringe bzw. Körper? Welche sind Unterringe, bzw. Unterkörper von $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?

   (a) $(\{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}, +, *) =: n\mathbb{Z}$ (für ein fixes $n \in \mathbb{N}$)

   (b) $(\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}, +, *)$

   (c) $(\{a + b\pi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, *)$

   Lösung:

   (a) Nach dem Unterringkriterium (Satz 15.5) ist dies ein Unterring von $\mathbb{Z}$, aber es ist kein Körper ($2n$ hat kein multiplikativ Inverses). (Ausserdem ist es ein Unterring von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.)

   (b) Dies ist zunächst ein Unterring von $\mathbb{R}$. Da $2^{1/3}$ irrational ist, kann es kein Unterring von $\mathbb{Q}$ oder gar $\mathbb{Z}$ sein. Es ist andererseits allerdings sogar ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, das inverse Element lässt sich angeben: sei zur Abkürzung $U = 2^{1/3}$, das Element $\sqrt[3]{1/2}$ lässt sich als $U^2/2$ schreiben. Dann ist für alle rationalen $a, b, c \in \mathbb{Q}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

   $$(a + bU + cU^2)^{-1} = \frac{(a^2 - 2bc) + (2c^2 - ab)U + (b^2 - ac)U^2}{a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc},$$

   wie man z.B. durch Nachrechnen verifizieren könnte. (Methoden, diese Formel herzuleiten, werden später in der Algebra behandelt.)

   (c) Weder Körper noch Ring, denn π^2 ist nicht rational (bekannte (?) Sätze der Zahlentheorie: es gibt einen direkten Beweis von Legendre, folgt auch aus der Transzendenz von π).

7. Gibt es Verknüpfungen $\triangle, \square$, sodass $(\mathbb{N}, \triangle, \square)$ ein Körper ist?

   Lösung:

   Solche Verknüpfungen gibt es für jeden gleichmächtigen, also abzählbaren Körper: Sei $(K, +, *)$ so ein Körper – bspweise. $(\mathbb{Q}, +, *)$ – und $f : \mathbb{N} \to K$ eine bijektive Abbildung der Mengen. Dann sind

   $$x \triangle y := f^{-1}(f(x) + f(y)), \qquad x \square y := f^{-1}(f(x) * f(y)),$$

   solche gesuchten Verknüpfungen, da sich alle Bedingungen für Körper übertragen; z.B. wenn $n_+, n_* \in K$ die neutralen Elemente bez. Addition und Multiplikation sind, so sind $f^{-1}(n_+), f^{-1}(n_*)$ für $\triangle, \square$ neutrale Elemente, also:

   $$a \triangle f^{-1}(n_+) = f^{-1}(f(a) + f(f^{-1}(n_+))) = f^{-1}(f(a) + n_+) = f^{-1}(f(a)) = a,$$

   und analog für n_*. Oder die (Rechts-)distributivität:

   $$\begin{aligned} a \square (b \triangle c) &= f^{-1}\left(f(a) * f(b \triangle c)\right) = f^{-1}\left(f(a) * f\left(f^{-1}\left(f(b) + f(c)\right)\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(f(a) * (f(b) + f(c))\right) = f^{-1}(f(a) * f(b) + f(a) * f(c)) \\ &= f^{-1}\left(f\left(f^{-1}\left(f(a) * f(b)\right)\right) + f\left(f^{-1}\left(f(a) * f(c)\right)\right)\right) \\ &= f^{-1}(f(a \square b) + f(a \square c)) = (a \square b) \triangle (a \square c). \end{aligned}$$

   Alle weiteren Bedingungen folgen analog.

8. Überprüfen Sie bei den folgenden Mengenpaaren, ob die Mengen gleichmächtig sind, geben Sie gegebenenfalls eine Bijektion an und bestimmen Sie die Kardinalität:

$$\begin{array}{llll} (a) & \{A,B,C\}, & \{\{A\},\{B\},\{C\}\} & \\ (b) & \mathbb{N}, & 6\mathbb{Z} & \\ (c) & \emptyset, & \{\emptyset\} & \\ (d) & [0,1], & [a,b], & \text{wobei } a<b \end{array}$$

LÖSUNG:

(a) Die Abbildung $f : x \mapsto \{x\}$ ist eine Bijektion zwischen diesen dreielementigen Mengen.

(b) Man überzeugt sich schnell, dass

$$f : \mathbb{N} \to 6\mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} 0 & n = 1, \\ 3n & n \text{ gerade}, \\ 3(1-n) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$g : 6\mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto \begin{cases} 1 & z = 0, \\ z/3 & z > 0, \\ 1 - z/3 & nz < 0 \end{cases}$$

zueinander inverse Funktionen sind, z.B. ist für n gerade, bzw. z negativ (da dann stets $3n > 0$, bzw. $1 - z/3$ ungerade ist)

$$g(f(n)) = g(3n) = n, \qquad f(g(z)) = f(1 - \frac{z}{3}) = 3(1 - (1 - \frac{z}{3})) = z.$$

Bzw., weniger explizit dargestellt kann man $6\mathbb{Z}$ in der Reihenfolge

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \dots\} = \{0, 6, -6, 12, -12, \dots\}$$

anordnen, wodurch mit der Abbildung $f : i \mapsto z_i$ die gleiche Bijektion gegeben ist.
Also sind die Mengen gleichmächtig und von der Kardinalität $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

(c) Es gibt keine Funktion, die ein Element der ersten, leeren Menge auf die leere Menge (als einziges Element der zweiten Menge) abbilden könnte, da es noch nicht einmal irgend ein Element in der ersten Menge gibt. Daher sind sie nicht gleichmächtig. In Kardinalitäten ausgedrückt, haben die Mengen die Mächtigkeit 0, bzw. 1.

(d) Die Funktion $f : [0,1] \to [a,b] : x \mapsto a + x*(b-a)$ besitzt mit $g : [a,b] \to [0,1] : x \mapsto (x-a)/(b-a)$ wegen

$$f(g(x)) = a + \frac{x-a}{b-a}(b-a) = x, \qquad g(f(x)) = \frac{(a + x*(b-a)) - a}{b-a} = x$$

eine inverse Funktion, d.h., f ist bijektiv, somit $[0,1]$ und $[a,b]$ gleichmächtig und von der Mächtigkeit $|\mathbb{R}| = c$.