Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

6. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$. Untersuchen Sie für die drei Fälle $n < m$, $n = m$ und $n > m$, ob ein lineares Gleichungssystem von n paarweise verschiedenen Gleichungen in m Variablen existiert, wobei alle Koeffizienten in allen Zeilen ungleich Null sind, sodass dieses System unendlich viele/keine/genau eine Lösung besitzt. Geben Sie für jeden dieser neun Fälle entweder ein Beispiel an (m und n dabei nicht auf bestimmte Zahlen fixieren) oder begründen Sie, warum der entsprechende Fall nicht auftreten kann.

   Lösung:

   (a) $n = m$: Eindeutig lösbar: Nehmen die rechte obere Dreiecksmatrix bestehend aus lauter Einsern und addieren die 1-er Matrix 1_n (also $n \times n$-Matrix aus lauter Einsern) dazu. Rechte Seite des GLS besteht lauter Zweiern.
   Keine Lösung: Ersetzen in obigem System z.B. die letzte Zeile in der Matrix durch das Doppelte der vorletzten Zeile, lassen aber die rechte Seite des GLS unverändert.
   Unendlich viele Lösungen: Ändern nun auch auf der rechten Seite des GLS den letzten Eintrag auf das Doppelte des vorletzten Eintrages um.

   (b) $n > m$: Ändern die Systeme aus erstem Punkt so um, dass wir unten einfach so viele Vielfache der ersten Zeile mit dazugehörigem ersten Eintrag auf der rechten Seite anhängen, sodass sich n Gleichungen ergeben.

   (c) $n < m$: Eindeutig lösbar: Geht nicht, zu wenige Gleichungen für die Unbekannten.
   Keine Lösung: Entferne aus dem unlösbaren System des ersten Punktes entsprechend viele Zeilen, um auf n Gleichungen zu kommen. Entferne aber nicht die letzten beiden Gleichungen, da diese die Unlösbarkeit hervorrufen.
   Unendlich viele Lösungen: Analog zu Punkt 1 ändern wir ausgehend von dem unlösbaren GLS den letzten Eintrag auf der rechten Seite des GLS nun auch auf das Doppelte des vorletzten Eintrages um.