
Gleichungssysteme

■ Substitution

$$2x - y = 3 \quad (\text{I})$$

$$x + 2y = 4 \quad (\text{II})$$

$$x = 4 - 2y \quad (\text{aus (II)})$$

einsetzen in (I)

$$2(4 - 2y) - y = 3$$

$$5 = 5y$$

$$y = 1$$

$$x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$L = \{(2, 1)\}$$

eine Lösung, nicht zwei !!!

■ Elimination

* Addieren / Subtrahieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

* Vertauschen von Zeilen erlaubt

* Weglassen der Variablen erlaubt, um Zeit zu sparen

* Umformen des Systems auf Diagonalform, mit lauter Einsen in der Diagonale

zum Beispiel :

$$2 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \quad (\text{I})$$

$$1 \quad -1 \quad 0 \quad 5 \quad (\text{II})$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad (\text{III})$$

wird zu :

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad (\text{I})$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad (\text{II})$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad (\text{III})$$

Hier sind die Lösungen direkt abzulesen ($x = 3$, $y = -2$, $z = 1$)

■ Bsp 1

(noch einmal ohne Weglassen der Variablen)

$$2x - y = 3 \quad (\text{I})$$

$$x + 2y = 4 \quad (\text{II})$$

$$2x - y = 3 \quad (\text{I})$$

$$-5y = -5 \text{ (I)} - 2 \text{ (II)}$$

$$2x - y = 3 \text{ (I)}$$

$$y = 1 : (-5)$$

$$x - y/2 = 3/2 \text{ (I)} \cdot 1/2$$

$$y = 1$$

$$x - y/2 = 3/2 \text{ (I)}$$

$$y = 1 \quad \text{(II)}$$

$$x = 2 \quad \text{(I)} + 1/2 \text{ (II)}$$

$$y = 1 \quad \text{(II)}$$

$L = \{(2, 1)\}$... eindeutig lösbar, eine Lösung

■ Bsp 2

$$2x + y - z = 3$$

$$x - y = 5$$

$$y + z = -1$$

$$2 \ 1 \ -1 \ 3 \quad \text{(I)} \quad \square$$

$$1 \ -1 \ 0 \ 5 \quad \text{(II)} \quad \square$$

$$0 \ 1 \ 1 \ -1 \quad \text{(III)} \quad \square$$

$$2 \ 1 \ -1 \ 3 \quad \text{(I)} \quad \square$$

$$0 \ 3 \ -1 \ -7 \quad \text{(II)} \quad \text{I} - 2 \text{ II}$$

$$0 \ 1 \ 1 \ -1 \quad \text{(III)} \quad \text{passt schon}$$

Methode I (keine Brüche, größere Zahlen)

$$2 \ 1 \ -1 \ 3 \quad \text{(I)} \quad \square$$

$$0 \ 3 \ -1 \ -7 \quad \text{(II)} \quad \square$$

$$0 \ 0 \ -4 \ -4 \quad \text{(III)} \quad \text{II} - 3 \text{ III}$$

$$6 \ 0 \ -2 \ 16 \quad \text{(I)} \quad 3 \text{ I} - \text{II}$$

$$0 \ 3 \ -1 \ -7 \quad \text{(II)} \quad \square$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \quad \text{(III)} \quad \square$$

$$6 \ 0 \ 0 \ 18 \quad \text{(I)} \quad \text{I} + 2 \text{ III}$$

$$0 \ 3 \ 0 \ -6 \quad \text{(II)} \quad \text{II} + \text{III}$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \quad \text{(III)} \quad \square$$

```

-----
1 0 0 3 (I) : 6
0 1 0 -2 (II) : 3
0 0 1 1 (III) □
-----

```

$L = \{ (3, -2, 1) \}$... eindeutig lösbar, eine Lösung

■ Bsp 3

$$\begin{aligned} y - x + z &= 0 \\ -x + 2z &= 2 \\ -z + y &= 3 \end{aligned}$$

```

-1 1 1 0 (I) □
-1 0 2 2 (II) □
0 1 -1 3 (III) □
-----

```

```

-1 1 1 0 (I) □
0 1 -1 -2 (II) I - II
0 1 -1 3 (III) □
-----

```

```

-1 1 1 0 (I) □
0 1 -1 -2 (II) □
0 0 0 -5 (III) II - III
-----

```

$$0z = -5$$

$$L = \{ \}$$

$$0 \dots 0 \quad c \neq 0$$

keine Lösung, immer wenn so eine Zeile auftritt,
egal zu welchem Zeitpunkt während des Algorithmus

■ Bsp 4

$$\begin{aligned} -z + y &= 3 \\ y - x + z &= 0 \\ x - 2z &= 3 \end{aligned}$$

Zeilen vertauschen

$$\begin{aligned} y - x + z &= 0 \\ -z + y &= 3 \\ x - 2z &= 3 \end{aligned}$$

```

-1 1 1 0 (I) □
0 1 -1 3 (II) □
1 0 -2 3 (III) □
-----

```

```

-1 1 1 0 (I) □
0 1 -1 3 (II) □
0 1 -1 3 (III) I + III

```

$$\begin{array}{rrrrr}
 -1 & 1 & 1 & 0 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 1 & -1 & 3 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \text{(III)} & \text{II} - \text{III}
 \end{array}$$

$$0z = 0$$

immer, wenn eine Zeile lauter Nuller enthält, ist der entsprechende Parameter frei wählbar.

hier : Zeile mit der Variablen an der dritten Stelle, also :

z frei wählbar, beliebig aus $\mathbb{R}$

wir setzen also etwa $z = \lambda$ und rechnen normal weiter, Richtung Diagonalform :

$$\begin{array}{rrrrr}
 -1 & 1 & 1 & 0 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 1 & -1 & 3 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & \lambda & \text{(III)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 -1 & 0 & 2 & -3 & \text{(I)} & \text{I} - \text{II} \\
 0 & 1 & -1 & 3 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & \lambda & \text{(III)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 -1 & 0 & 0 & -3 - 2\lambda & \text{(I)} & \text{I} - 2 \text{III} \\
 0 & 1 & 0 & 3 + \lambda & \text{(II)} & \text{II} + \text{III} \\
 0 & 0 & 1 & \lambda & \text{(III)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 1 & 0 & 0 & 3 + 2\lambda & \text{(I)} & * (-1) \\
 0 & 1 & 0 & 3 + \lambda & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & \lambda & \text{(III)} & \square
 \end{array}$$

$$x = 3 + 2\lambda$$

$$y = 3 + \lambda$$

$$z = 0 + \lambda$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

... unendlich viele Lösungen, ein frei wählbarer Parameter

■ Bsp 5

$$x - y + z = 0$$

$$2x - 2y + 2z = 0$$

$$-x + y - z = 0$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 1 & -1 & 1 & 0 & \text{(I)} & \square \\
 2 & -2 & 2 & 0 & \text{(II)} & \square \\
 -1 & 1 & -1 & 0 & \text{(III)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & -1 & 1 \ 0 \quad (\text{I}) \quad \square \\
 0 & 0 & 0 \ 0 \quad (\text{II}) \quad \text{II} - 2 \text{I} \\
 0 & 0 & 0 \ 0 \quad (\text{III}) \quad \text{I} + \text{III}
 \end{array}$$

$$0z = 0, \quad z = \lambda$$

$$0y = 0, \quad y = \mu$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & -1 & 1 \ 0 \quad (\text{I}) \quad \square \\
 0 & 1 & 0 \ \mu \quad (\text{II}) \quad \square \\
 0 & 0 & 1 \ \lambda \quad (\text{III}) \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & 0 & 1 \ \mu \quad (\text{I}) \quad \text{I} + \text{II} \\
 0 & 1 & 0 \ \mu \quad (\text{II}) \quad \square \\
 0 & 0 & 1 \ \lambda \quad (\text{III}) \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & 0 & 0 \ \mu - \lambda \quad (\text{I}) \quad \text{I} - \text{III} \\
 0 & 1 & 0 \ \mu \quad (\text{II}) \quad \square \\
 0 & 0 & 1 \ \lambda \quad (\text{III}) \quad \square
 \end{array}$$

$$x = 0 - 1\lambda + 1\mu$$

$$y = 0 + 0\lambda + 1\mu$$

$$z = 0 + 1\lambda + 0\mu$$

also :

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

■ Bsp 6

$$-a + 3b + c - 2d = -3$$

$$2b - d + e = -1$$

$$a + b - c = 1$$

$$-a + b + c - d - e = -2$$

$$\begin{array}{rcl}
 -1 & 3 & 1 \ -2 \ 0 \ -3 \quad (\text{I}) \quad \square \\
 0 & 2 & 0 \ -1 \ 1 \ -1 \quad (\text{II}) \quad \square \\
 1 & 1 & -1 \ 0 \ 0 \ 1 \quad (\text{III}) \quad \square \\
 -1 & 1 & 1 \ -1 \ -1 \ -2 \quad (\text{IV}) \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 -1 & 3 & 1 \ -2 \ 0 \ -3 \quad (\text{I}) \quad \square \\
 0 & 2 & 0 \ -1 \ 1 \ -1 \quad (\text{II}) \quad \text{passt schon} \\
 0 & 4 & 0 \ -2 \ 0 \ -2 \quad (\text{III}) \quad \text{III} + \text{I} \\
 0 & -2 & 0 \ 1 \ -1 \ 1 \quad (\text{IV}) \quad \text{IV} - \text{I}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 -1 & 3 & 1 \ -2 \ 0 \ -3 \quad (\text{I}) \quad \square \\
 0 & 2 & 0 \ -1 \ 1 \ -1 \quad (\text{II}) \quad \square \\
 0 & 0 & 0 \ 0 \ -2 \ 0 \quad (\text{III}) \quad \text{III} - 2 \text{II} \\
 0 & 0 & 0 \ 0 \ 0 \ 0 \quad (\text{IV}) \quad \text{IV} + \text{II}
 \end{array}$$

Was ist passiert? Wir können jetzt c nicht mehr berechnen.

An der entsprechenden Stelle in der Matrix steht kein Wert mehr :

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \text{(III)} & \text{III} - 2 \text{ II} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{(IV)} & \text{IV} + \text{II}
 \end{array}$$

Da es für c also keine "Bedingungen" gibt, ist c frei wählbar und wir

ergänzen $c = \lambda$

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

auch d ist nicht mehr in der Diagonale, wir vertauschen Zeilen (IV) und (V)

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

das bedeutet, dass auch d frei wählbar ist :

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & \text{(II)} & \square \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & * \left(-\frac{1}{2}\right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & \text{(II)} & \text{II} - \text{V} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 + \mu & \text{(II)} & \text{II} + \text{IV} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 + \mu & \text{(II)} & \text{II} + \text{IV} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
 -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & -3 & \text{(I)} & \square \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} & \text{(II)} & * \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
-1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -3 + 2\mu & \text{(I)} & \text{I} + 2 \text{ IV} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} & \text{(II)} & \square \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square \\
\\
-1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 - \lambda + 2\mu & \text{(I)} & \text{I} - \text{III} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} & \text{(II)} & \square \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square \\
\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\mu & \text{(I)} & \text{I} - 3 \text{ II} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} & \text{(II)} & \square \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square \\
\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} + \lambda - \frac{1}{2}\mu & \text{(I)} & * (-1) \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} & \text{(II)} & \square \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & \text{(III)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu & \text{(IV)} & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{(V)} & \square
\end{array}$$

Somit ist die Lösung gegeben durch :

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

... unendlich viele Lösungen, zwei frei wählbare Parameter

■ Gleichungssysteme mit *Mathematica* lösen

für folgendes Beispiel :

$$\begin{array}{l}
2x + y - z = 3 \\
2x + 2y - 2z = 6 \\
-2x - y + z = -3
\end{array}$$

■ (1) (nicht notwendig!!!) Zwischenergebnis : Ausgabe der Dreiecksmatrix :

komplettes System inkl. rechter Seite eingeben :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

RowReduce[A] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ (2) Endergebnis :

Koeffizientenmatrix eingeben und rechte Seite als Vektor eingeben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix};$$

`LinearSolve[A, b]`

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \{0\}, \{0\} \right\}$$

`NullSpace[A]`

$$\{\{1, 0, 2\}, \{-1, 2, 0\}\}$$

(Interpretation siehe unten)

oder dasselbe in schöner formatierter Ausgabe :

`LinearSolve[A, b] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

`MatrixForm[NullSpace[A], TableDirections -> {Row, Column}]`

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

dies bedeutet, dass die Lösungsmenge gegeben ist durch :

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Schön formuliert :

"LinearSolve" liefert eine "spezielle Lösung",

"NullSpace" liefert die Vektoren bei den frei wählbaren Parametern.

■ Weitere Fälle:

Bei einer eindeutigen Lösung liefert Nullspace
die leere Menge und LinearSolve eben diese Lösung.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

`LinearSolve[A, b]`

$$\{\{4\}, \{-5\}\}$$

`NullSpace[A]`

$$\{\}$$

Bei einem System ohne Lösung liefert LinearSolve eine Fehlermeldung :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

`LinearSolve[A, b]`

LinearSolve::nosol: Linear equation encountered that has no solution. >>

`LinearSolve[{{2, 1}, {4, 2}}, {{3}, {3}}]`

■ Bsp 6 von oben mit *Mathematica*:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

`LinearSolve[A, b] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

`MatrixForm[NullSpace[A], TableDirections -> {Row, Column}]`

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(Vektoren sind hier nur vertauscht, einer mit 2 multipliziert)