Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
9. Übungsblatt für den 13.12.2010

1. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Es gilt $L(v_1, \ldots, v_k, w) = L(v_1, \ldots, v_k)$ genau dann, wenn $w \in L(v_1, \ldots, v_k)$.

2. Sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann auch $B_1 = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. (a) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sei $M := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = d\}$. Zeigen Sie: M ist ein Unterraum von $V \Leftrightarrow d = 0$.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

4. Sei $V = \mathbb{R}^4$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von V? Geben Sie für die Unterräume eine Basis an und begründen Sie in jenen Fällen wo es sich um keine Unterräume handelt, wieso es sich um keine Unterräume handelt.

   (a) $\{(a, a, a, a)|a \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $\{(a, b, a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $\{(a, 2a, b, a + b)|a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (d) $\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4|2a_2 + 3a_3 = 0\}$.

   (e) $\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4|2a_2 + 3a_3 = 5\}$.

5. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Sei A eine $m \times n$ Matrix, also $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ein Unterraum von V ist. (Man spricht in diesem Zusammenhang vom Nullraum der Matrix A).

6. (a) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums U des $\mathbb{R}^4$, der durch $U := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ gegeben ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums V des $\mathbb{R}^4$, der durch $V := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ gegeben ist.

7. (Fortsetzung des obigen Beispiels) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap V$, mit U und V aus dem obigen Beispiel. (Hinweis: $U \cap V$ ergibt sich wieder als Nullraum einer entsprechenden Matrix)

8. Sei $V = \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$U = L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix})$$

mit Hilfe von Algorithmus 6.23 aus dem Vorlesungsskriptum. Liegt der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in U?