Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
8. Übungsblatt für den 6. Dezember 2010

1. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$?

   (a) $U_1 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3x + 2y = 0 \right\}$,

   (b) $U_2 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + 3y \leq 0 \right\}$,

   (c) $U_3 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^4 = 0 \right\}$,

   (d) $U_4 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y = 0 \right\}$.

   Begründen Sie Ihre Aussage.

2. Welche der Mengen $M_1 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, $M_2 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 = x_2\}$, $M_3 := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \cdots x_n = 0\}$ bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$? Begründen Sie Ihre Aussage.

3. Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und seien $x, y \in U$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass dann die Verbindungsgerade der beiden Punkte in U enthalten ist.

4. (a) Liegt $\binom{2}{-1}$ in der linearen Hülle von $\binom{0}{0}, \binom{1}{2}, \binom{-2}{-4}$?

   (b) Liegt $\binom{1}{-5}$ in der linearen Hülle von $\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{1}{4}$?

   (c) Liegt $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

5. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien U, V, W Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

   (a) Falls $W = U \cup V$, dann gilt entweder $U = W$ oder $V = W$.

   (b) Der Durchschnitt $U \cap V$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

6. (a) Finden Sie eine Teilmenge V des $\mathbb{R}^3$, die die Eigenschaft $\forall v \in V \, \forall \alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha v \in V$ erfüllt und die Eigenschaft $\forall v, w \in V \,:\, v + w \in V$ nicht erfüllt.

   (b) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $L(5v + w, 2v + 3w) = L(v, w)$.

7. (a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -25 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

   (b) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

   (c) Finden Sie drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass a, b linear unabhängig sind, aber a, b, c linear abhängig.

8. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $T(x, y) = xv + yw$ ist genau dann injektiv, wenn v und w linear unabhängig sind.