Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
7. Übungsblatt für den 29. November 2010

1. (a) Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist injektiv oder surjektiv?

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = 1 + x^2, \quad h(x) = 1 + x^3, \quad i(x) = 1 + x^2 + 2x^3.$$

   (b) Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv oder surjektiv?

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = 1 + x^2, \quad h(x) = 1 + x^3, \quad i(x) = 1 + x^2 + 2x^3.$$

2. (a) Sei f wie in Aufgabe 1(a). Bestimmen Sie das Urbild der geraden Zahlen, d.h. $f^{-1}[2\mathbb{Z}]$
   (b) Sei g wie in Aufgabe 1(b). Bestimmen Sie das Urbild des Intervalls $[1, 5]$.
   (c) Sei h wie in Aufgabe 1(b). Bestimmen Sie die Umkehrfunktion h^{-1}.

3. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$. Untersuchen Sie ob f injektiv oder surjektiv ist und berechnen Sie, falls möglich, f^{-1}.

4. Seien X, Y nichtleere Mengen. Zeigen Sie: Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $A, B \subseteq X$ gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

5. Seien A, B, C nichtleere Mengen.
   (a) Sei $f : A \to B$ und $g, h : B \to C$. Zeigen Sie: Falls f surjektiv ist und $g \circ f = h \circ f$, dann folgt $g = h$.
   (b) Sei $f : B \to C$ und $g, h : A \to B$. Zeigen Sie: Falls f injektiv ist und $f \circ g = f \circ h$, dann folgt $g = h$.

6. (a) Geben Sie ein Beispiel für eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an die nicht injektiv ist.
   (b) Geben Sie ein Beispiel für eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an die nicht surjektiv ist.

7. Sei X eine endliche Menge und sei $f : X \to X$. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

8. Geben Sie, wenn möglich, jeweils ein Element aus folgenden Mengen an:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$