**Übungen zu**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1**
**6. Übungsblatt für den 22. November 2010.**

1. Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{R}^6$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Gehen Sie dabei streng nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren vor.

2. Seien $A$ und $B$ Teilmengen von $U$. Zeigen Sie

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U(A) \cup \complement_U(B).$$

3. (a) Berechnen Sie $\mathcal{P}(\{0,1\}) \cap \mathcal{P}(\{1,2\})$.
   (b) Gilt stets $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?
   (c) Zeigen Sie $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

4. (a) Zeigen Sie

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

   für alle $n \geq 1$ und $i \geq 1$ unter Verwendung der Definitionen

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

   und

$$m! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \qquad \text{für } m \geq 1, \text{ und } 0! = 1.$$

   (b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

   für alle natürlichen Zahlen $r \geq 0$ und $n \geq 0$. *Hinweis:* Verwenden Sie vollständige Induktion in $n$. Im Induktionsschritt hilft Teil (a).

5. Sei $A$ eine beliebige Menge.
   (a) Zeigen Sie $\bigcap \mathcal{P}(A) = \emptyset$.
   (b) Zeigen Sie $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.
6. Seien $A, A', B$ und $B'$ Mengen.
   (a) Zeigen Sie
   $$(A \subseteq A' \wedge B \subseteq B') \implies A \times B \subseteq A' \times B'.$$
   (b) Gilt die Umkehrung?
7. (a) Sei $R = \{(1,4), (2,3), (3,10)\}$. Ist $R$ eine funktionale Relation von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$?
   (b) Ist
   $$g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$
   eine funktionale Relation von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$? Ist
   $$h := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$
   eine funktionale Relation von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$?
8. (a) Sei $f$ eine Funktion von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$, die jedes $x \in \mathbb{Z}$ auf $x^2$ abbildet, und $A := \{-1, 0, 1\}$. Geben Sie $f|_A$ explizit an.
   (b) Seien $X, Y$ Mengen, seien $X_1$ und $X_2$ Teilmengen von $X$, und sei $f$ eine Funktion von $X$ nach $Y$. Zeigen Sie
   $$f|_{X_1} \cap f|_{X_2} = f|_{X_1 \cap X_2}.$$