Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
4. Übungsblatt für den 15. 11. 2010

1. Finden Sie je zwei 3×3 Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass
   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,
   (b) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

2. (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

   (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -3 & -2 & 3 \\ -9 & -7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + (1+2\alpha)x_2 + (\alpha - 3)x_3 &= 2 \\ -x_1 + (1+2\alpha)x_2 + (2\alpha - 6)x_3 &= 3 \\ -x_1 + (1+3\alpha)x_2 + (2\alpha - 6)x_3 &= 4 \end{aligned}$$

   keine Lösung.

4. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ in Zeilenstaffelform und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ derart, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

   die gleiche Lösungsmenge wie $Ax = b$ besitzt.

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix, und seien $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Zeigen Sie:
   (a) Auch $v + w$ löst $Ax = 0$.
   (b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist αv eine Lösung von $Ax = 0$.

6. Sei

$$U = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Invertieren Sie U analog zu Kapitel 2.9 im Skript durch Lösen der entsprechenden Gleichungssysteme.

7. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Zeigen Sie: Genau dann ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes beliebige $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar, wenn A invertierbar ist.

   (Hinweis: Sie können Satz 2.20 aus dem Skriptum verwenden.)

8. (a) Seien

$$A = \{1,2,3,4\}, \qquad B = \{3,4,5,6\}, \qquad \text{und} \qquad C = \{1,2,5,6\}.$$

   Berechnen Sie

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad (A \cap B) \cup C, \qquad \text{und} \qquad A \cap (B \cup C).$$

   (b) Seien

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\} \qquad \text{und} \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 4\}.$$

   Berechnen Sie $F \cap G$.