Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
3. Übungsblatt für den 25. Oktober 2010

1. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung
$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$
indem Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle \vec{a} + x\vec{b}, \vec{a} + x\vec{b} \rangle$ mittels Differentialrechnung minimieren. *Hinweis:* Beachten Sie, dass stets $f(x) \geq 0$ gilt (warum?).

2. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Beweisen Sie die sog. Parallelogrammregel
   $$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|).$$
   Woher hat diese Gleichung ihren Namen?
   (b) Zeigen Sie
   $$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2\right).$$

3. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Angenommen $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:
   $$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2.$$
   Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch? Welchen Namen könnte man dieser Aussage geben?
   (b) Zeigen Sie, dass
   $$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$
   Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch? Wann kann hier sogar Gleichheit gelten?

4. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie folgende Identitäten:
   (a) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle$;
   (b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{c}$.

5. (a) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Als das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannte Parallelepiped bezeichnet man den "verzogenen Quader" mit den Eckpunkten $\vec{0}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Zeigen Sie, dass das Volumen V dieses Parallelepipeds gegeben ist durch
   $$V = |\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle|.$$
   Hinweis: Verwenden Sie, dass "V = Grundfläche $\times$ Höhe".
   (b) Berechnen Sie das Volumen des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelepipeds.

6. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Zeigen Sie die sog. Lagrange-Identität
   $$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle.$$

(b) Folgern Sie daraus die Ungleichung $\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

7. Gegeben seien die Ebenen ϵ_1: $x - y + z = 0$ und ϵ_2: $x - 2y = 3$ in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bestimmen Sie die beiden Ebenen in Parameterform.

   (b) Berchnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.

8. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden $g : \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $\epsilon : x + 3y + z = 4$ zuläuft, wird an der Ebene reflektiert.

   (a) In welchem Punkt P trifft der Lichtstrahl auf die Ebene?

   (b) Auf welcher Geraden h verläuft der reflektierte Strahl?