Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
1. Übungsblatt für den 11.10.2010

Nutzen Sie auch die Gelegenheit das Konversatorium Lineare Algebra, beginnend mit 7.10.2010, 13:45, K033C zu besuchen.

1. Eine Person geht mit einer Geschwindigkeit von $5km/h$ und startet dabei im Punkt $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (alle Einheiten in km). Zunächst geht die Person $25min$ in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und anschließend $20min$ in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann stoppt die Person.

   (a) In welchem Punkt B stoppt die Person?

   (b) Wie weit ist Punkt B von A entfernt?

2. Direkt am gegenüberliegenden Ufer eines Flusses sieht eine Person mit $1.65m$ Augenhöhe die Spitze eines Baums unter einem Höhenwinkel von $10°$. Die Aufgabe der Person ist es, die Höhe dieses Baums zu berechnen. Allerdings ist die Flussbreite noch unbekannt. Dazu steckt die Person direkt am Ufer eine Standlinie AB mit einer Länge von $15m$ ab. Dadurch erhält die Person ein Dreieck ABC (mit üblicher Beschriftung) wobei C der Fußpunkt des Baumes ist. Durch Messung erhält die Person die Winkel $\alpha = 80°$ und $\beta = 75°$. Wie hoch ist der Baum?

3. Von einem Dreieck kennt man die 3 Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks.

   (b) Berechnen Sie die Winkeln im Dreieck.

   (c) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.

4. Von einem gleichseitigen Dreieck (Beschriftung wie üblich, $a = b$) kennt man die Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Höhe durch die Spitze C auf die Seite c beträgt $h = 2\sqrt{10}$. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze C (es gibt 2 Lösungen).

5. Beweisen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) $<\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}> = <\vec{a},\vec{a}> -2 <\vec{a},\vec{b}> + <\vec{b},\vec{b}>$.

(b) $<\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}> = <\vec{a},\vec{a}> - <\vec{b},\vec{b}>$.

6. In einem Parallelogramm (Beschriftung wie üblich) mit Seitenlängen a, b und Diagonalenlängen e, f gilt: $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$.

   (a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Cosinussatzes.

   (b) Sei $\vec{e} = \vec{AC}$ und $\vec{f} = \vec{BD}$. Dann lässt sich dieser Satz auch mit Hilfe von Skalarprodukten beweisen, wobei $a = |\vec{a}| = |\vec{AB}|$, $b = |\vec{b}| = |\vec{BC}|$. Führen Sie diesen Beweis aus.

7. Von einem allgemeinen Viereck $ABCD$ kennt man die Länge der Seite $a = AB = 35m$, $b = BC = 30m$, $c = CD = 57m$ und $d = DA = 20m$. Der Winkel α beim Eckpunkt A beträgt $110°$. Berechnen Sie die Fläche des Vierecks.

8. (a) Berechnen Sie die Seitenlänge b eines Dreiecks mit Seitenlänge $c = 10$, Winkel $\alpha = 20°$ und Seitenlänge $a = 8$.

   (b) Bestimmen Sie a so, dass nur ein Dreieck mit Seitenlänge $c = 10$ und Winkel $\alpha = 20°$ existiert.