Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
13. Übungsblatt für den 31. Jänner 2011

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei U die Menge aller $n \times n$-Matrizen, deren Einträge unter der Diagonale allesamt 0 sind. Also $M \in U$ genau dann wenn $M[i, j] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$. Zeigen Sie, dass Summen und Produkte von Matrizen in U wieder in U sind.

2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
   (a) $L(M)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
   (b) $L(M) = M$ gilt genau dann, wenn M ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.
   (c) $L(L(M)) = L(M)$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die durch $f(x) = A \cdot x$ gegebene Abbildung, wobei A eine $m \times n$-Matrix ist. Zeigen Sie:
   (a) Ist $n > m$, so ist f nicht injektiv.
   (b) Ist $n < m$, so ist f nicht surjektiv.
   (c) Ist f bijektiv, so folgt $n = m$.

4. Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ und sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $T(x, y) = xv + yw$ gegebene Abbildung. Zeigen Sie:
   (a) T ist injektiv genau dann, wenn v, w linear unabhänging sind.
   (b) T ist surjektiv genau dann, wenn v, w linear unabhänging sind.
   (c) T ist bijektiv genau dann, wenn v, w linear unabhänging sind.

5. Unter welcher Bedingung an a, b und c sind
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$
drei zueinander linear abhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$?

6. Sei $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$, und sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei
$$B = (b_1, \ldots, b_k)$$
eine linear unabhänginge Folge von Elementen aus M mit der Eigenschaft, dass $(b_1, \ldots, b_k, m)$ für alle $m \in M$ linear abhängig ist. Zeigen Sie, dass B eine Basis für $L(M)$ ist.

7. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
   (a) $L(A^\perp) = A^\perp$
   (b) $L(A)^\perp = A^\perp$.

8. (a) Sei U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $U \cap U^\wedge = \{0\}$.
   (b) Sei A eine Matrix. Zeigen Sie, dass $Z(A) \cap N(A) = \{0\}$.