Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
12. Übungsblatt für den 24. Januar 2011

1. Lösen Sie das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 10x_6 & = & 0 \\
-2x_1 & - & 4x_2 & & & - & 2x_4 & + & x_5 & + & 5x_6 & = & 2 \\
-x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 8x_6 & = & 1
\end{array}$$

nach Algorithmus 6.64.

2. Geben Sie die Dimension des Nullraumes von

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -8 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -6 & 8 & -11 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

an ohne die Lösungsmenge anzugeben.

3. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann invertierbar, wenn A den Rang n besitzt.

(b) Ist B eine beliebige $m \times n$ Matrix, dann ist der Rang von BA kleiner oder gleich dem Rang von A.

4. Sei U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass U die genaue Lösungsmenge eines homogenen, linearen Gleichungssystems ist. Wieviele Gleichungen werden mindestens benötigt?

(b) Geben Sie explizit ein minimales Gleichungssystem an für $n = 4$ und

$$U = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

5. Gegeben seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie: $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

6. Sei $B = (b_1, \ldots, b_k)$ eine Orthonormalbasis eines Unterraumes V von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle v und $w \in V$ gilt

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i\rangle \langle b_i, w\rangle.$$

7. Für eine $n \times n$-Matrix A definieren wird die Abbildung

$$L\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto & v^T A w \end{array}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle v_1, v_2, w_1 und $w_2 \in \mathbb{R}^n$ und all $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$L(v_1 + \alpha v_2, w_1) = L(v_1, w_1) + \alpha L(v_2, w_1) \qquad \text{und} \qquad L(v_1, w_1 + \alpha w_2) = L(v_1, w_1) + \alpha L(v_1, w_2).$$

(b) Es gilt genau dann $L(v, w) = L(w, v)$ für alle v und $w \in \mathbb{R}^n$, wenn $A^T = A$.

8. (*Gram-Schmidt*) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum $L(b_1, b_2, b_3)$ des $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

erzeugt wird.