Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
11. Übungsblatt für den 17.1.2011

1. Eine Ebene e in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $e = L(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$. $B = (\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ ist eine Basis von e. $C = (\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix})$ ist ebenfalls eine Basis von e. Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie $(v)_B$. Berechne, falls möglich, $(w)_B$ für $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. (Algorithmus 6.56, 6.75)

   (a) Gilt $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$?

   (b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}) + L(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

3. (Fortsetzung des Beispiels, Algorithmus 6.83)

   Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}) \cap U$ wobei $U = \{x \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} -1 & -17 & 7 \end{pmatrix} \cdot x = 0\}$. (Es gilt $U = N(\begin{pmatrix} -1 & -17 & 7 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.)

   Gehen Sie nach Algorithmus 6.83 vor. Bestimmen Sie zunächst mit Hilfe von Algorithmus 6.82 ebenfalls eine Matrix A, sodass $N(A) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})$.

4. (Algorithmus 6.56)

Gilt $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$? Finden Sie ausserdem jeweils eine Basis für die Unterräume.

5. Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrizen $(A\ b_1)$ und $(A\ b_2)$

   (b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme $A \cdot x = b_i$ $(i \in \{1, 2\})$ und geben Sie die Lösungsmengen in der Form $x_0 + N(A)$ an, wobei x_0 eine spezielle Lösung bezeichnet.

6. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie den Rang von A und daraus die Dimension des Nullraums von A.

   (b) Bestimmen Sie b so, dass das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ keine Lösung besitzt (siehe Übungsaufgabe 6.67 des Skripts).

   (c) Existiert ein b so, dass $A \cdot x = b$ eine eindeutige Lösung besitzt?

7. (Algorithmus 6.75) Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$ wobei $U = \{x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und $V = \{x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

8. (Algorithmus 6.83) Sei $U = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ und $V = L(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   (a) Bestimmen Sie Matrizen A und B, sodass $N(A) = U$ und $N(B) = V$.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.