Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
10. Übungsblatt für den 10. Jänner 2011

1. Seien a, b, c, d, e, f reelle Zahlen.

   (a) Geben Sie explizit eine Basis des Raumes aller Lösungen $(x_1, \ldots, x_5)$ des Systems

   $$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & ax_4 & + & dx_5 & = & 0, \\ & x_2 & & + & bx_4 & + & ex_5 & = & 0, \\ & & x_3 & + & cx_4 & + & fx_5 & = & 0 \end{array}$$

   an.

   (b) Zeigen Sie – ohne Verwendung von Satz 6.37 – dass Sie in Aufgabe (1a) tatsächlich eine Basis des Lösungsraumes erhalten haben.

   (c) Geben Sie explizit eine Basis des Raumes aller Lösungen $(x_1, \ldots, x_5)$ des Systems

   $$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & + & ax_3 & + & dx_4 & & & = & 0, \\ & x_2 & + & bx_3 & + & ex_4 & & & = & 0, \\ & & & cx_3 & + & fx_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

   unter der Annahme $c = f = 0$ an.

2. Seien a, b, c, x reelle Zahlen. Geben Sie eine Basis des Nullraumes von

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 20 & 0 \\ b & c & 11 \end{pmatrix}$$

   an.

3. Berechnen Sie die Zeilenstaffelnormalform der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 21 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 33 \end{pmatrix}$$

   nach Algorithmus 6.27 und berechnen Sie eine Basis des Nullraumes von A nach Algorithmus 6.39.

4. (a) Sind die Vektoren

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   linear abhängig?

(b) Hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0, \\ -x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

neben $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ noch eine andere Lösung?

5. (a) Sei $m < n$ und sei A eine $m \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass $N(A)$ eine Basis aus mindestens $n - m$ Vektoren hat. (*Hinweis:* Argumentieren Sie über die Zeilenstaffelnormalform von A.)

   (b) Sei $m < n$. Zeigen Sie, dass ein beliebiges System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

   von m homogenen linearen Gleichungen in n Variablen einen Lösungsraum hat, dessen Dimension zumindest $n - m$ ist.

   (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Aufgabe 5a und Satz 6.42?

6. Sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in V, so dass für alle $w \in V$ die Vektoren $v_1, \ldots, v_k, w$ linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von V bilden.

7. Zeigen Sie dass
$$\dim(L(v_1, \ldots, v_k)) \leq k$$
für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gilt.

8. Sei A eine invertierbare $n \times n$ - Matrix. Zeigen Sie dass

   (a) $Z(A) = \mathbb{R}^n$,

   (b) $S(A) = \mathbb{R}^n$,

   (c) $N(A) = \{0\}$.