

**Unterlagen zur Vorlesung**

**Lineare Algebra  
und Analytische Geometrie 1**

Wintersemester 2009/10

Erhard Aichinger  
Institut für Algebra  
Johannes Kepler Universität Linz

Alle Rechte vorbehalten

Version 21. Oktober 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>Teil 1. Vektoren und Matrizen</b>	<b>1</b>
Kapitel 1. Geometrie in der Ebene und im Raum	3
1. Koordinaten	3
2. Vektoren	3
3. Die Länge eines Vektors	5
4. Trigonometrie	7
5. Der Winkel zwischen zwei Vektoren	14
6. Geraden in der Ebene	16
7. Vektoren im $\mathbb{R}^n$	20
8. Geraden und Ebenen im Raum	24
Kapitel 2. Matrizen	29
1. Die Definition von Matrizen	29
2. Die Addition von Matrizen	30
3. Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl	31
4. Die Multiplikation von Matrizen	31
5. Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von Matrizen	33
6. Die Multiplikation von Vektoren und Matrizen	34
7. Das Transponieren von Matrizen	35
8. Die Einheitsmatrizen	36
9. Das Invertieren von Matrizen	37
Kapitel 3. Lineare Gleichungssysteme	41
1. Beispiele	41
2. Die Lösung von Gleichungssystemen in Staffelform	45
3. Das Gaußsche Eliminationsverfahren	47
4. Einige durchgerechnete Beispiele zum Gauß-Algorithmus	50
<b>Teil 2. Mengen und Funktionen</b>	<b>57</b>
Kapitel 4. Mengen	59
1. Eigenschaften von Mengen	59
2. Operationen auf Mengen	59
Kapitel 5. Relationen und Funktionen	63
1. Geordnete Paare	63

2.	Relationen	63
3.	Funktionen	64
4.	Definitions- und Wertebereich	65
5.	Familien und Folgen	66
6.	Hintereinanderausführung von Funktionen	68
<b>Teil 3. Vektorräume</b>		<b>71</b>
Kapitel 6. Unterräume des $\mathbb{R}^n$		73
1.	Die Definition eines Unterraums	73
2.	Die lineare Hülle von Vektoren	75
3.	Die lineare Unabhängigkeit von Vektoren	76
4.	Basen eines Vektorraums	77
5.	Die Zeilenstaffelnormalform	82
6.	Der Nullraum einer Matrix	87
7.	Die Dimension eines Unterraumes	92
8.	Der Rang einer Matrix	94
9.	Die Eindeutigkeit der Zeilenstaffelnormalform	94
10.	Die Lösungsmenge inhomogener linearer Gleichungssysteme	96
11.	Koordinaten	100
12.	Summen und Durchschnitte von Unterräumen	102
Kapitel 7. Orthogonalität		107
1.	Der Winkel zwischen zwei Vektoren	107
2.	Der Normalraum auf eine Menge von Vektoren	108
3.	Orthonormalbasen	108
4.	Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren	110
5.	Orthogonalprojektionen	113
6.	Abstandsberechnungen mit Hilfe der Orthogonalprojektion	116
7.	Die bestapproximierende Lösung eines linearen Gleichungssystems	121
Kapitel 8. Ringe, Körper und Vektorräume		123
1.	Kommutative Ringe mit Eins	123
2.	Vektorräume	124
Kapitel 9. Lineare Abbildungen		127
1.	Beispiele	127
2.	Die Definition linearer Abbildungen	128
3.	Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen	130
4.	Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen	133
5.	Basistransformationen	136
6.	Die Hintereinanderausführung und die Matrizenmultiplikation	137
7.	Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen bezüglich der kanonischen Basis	138

INHALTSVERZEICHNIS

v

Literaturverzeichnis

143

Anhang A. Programme, die vorrechnen

145

## **Teil 2**

# **Mengen und Funktionen**



## KAPITEL 4

# Mengen

### 1. Eigenschaften von Mengen

Unter einer *Menge* stellen wir uns eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen vor. Wenn das Objekt  $a$  zur Menge  $M$  gehört, schreiben wir

$$a \in M.$$

Zwei Mengen  $A, B$  sehen wir als gleich an, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Diese Eigenschaft nennt man das *Extensionalitätsaxiom* oder *Axiom der Umfangsbestimmtheit*.

Der Begriff *Menge* wird nicht präzise mathematisch definiert. Vielmehr gibt man einige Eigenschaften an, die Mengen unserer Vorstellung nach erfüllen sollen. Als Grundlage fast aller Teilgebiete der Mathematik haben sich jene Eigenschaften bewährt, die Ernst Zermelo, Abraham Adolf Fraenkel und Thoralf Skolem von 1907 bis 1929 von Mengen gefordert haben. Diese Eigenschaften sind die *Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre*. Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre hat sich als ausgezeichnet geeignet herausgestellt, fast alle Resultate der Mathematik klar darzustellen und zu vermitteln. Zum anderen sind die Axiome auch theoretisch – in der Logik und der Mengenlehre – gut untersucht worden, und man hat bis heute keinen Widerspruch in ihnen gefunden. Wir werden nicht alle Axiome diskutieren, aber zumindest das Extensionalitätsaxiom explizit angeben.

AXIOM 4.1 (Extensionalitätsaxiom). *Seien  $A, B$  Mengen. Dann gilt  $A = B$  genau dann, wenn für alle  $x \in A$  auch  $x \in B$  gilt, und für alle  $x \in B$  auch  $x \in A$  gilt.*

Insbesondere gilt  $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 3, 1, 2, 2\}$ .

DEFINITION 4.2 (Teilmenge). *Seien  $A, B$  Mengen. Dann gilt  $A \subseteq B$  genau dann, wenn für alle  $a \in A$  auch  $a \in B$  gilt.*

### 2. Operationen auf Mengen

DEFINITION 4.3. *Seien  $A, B$  Mengen. Dann definieren wir:*

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}, \\ A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}. \end{aligned}$$

$A \cap B$  ist der *Durchschnitt* von  $A$  und  $B$ .  $A \cup B$  ist die *Vereinigung* von  $A$  und  $B$ .

SATZ 4.4. Seien  $A, B, C$  Mengen. Dann gilt:

- (1)  $A \cap B = B \cap A$ ,
- (2)  $A \cup B = B \cup A$ ,
- (3)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ,
- (4)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ,
- (5)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ,
- (6)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

DEFINITION 4.5. Seien  $A, B$  Mengen. Dann ist  $B \setminus A$  definiert durch

$$B \setminus A := \{x \mid x \in B \text{ und } x \notin A\}.$$

Dabei steht  $x \notin A$  für (nicht  $x \in A$ ).

Wenn man nur Mengen betrachtet, die Teilmengen einer Menge  $U$ , des *Universums*, sind, so schreibt man auch  $\complement_U B$  für  $U \setminus B$ . Es gelten etwa folgende Zusammenhänge:

SATZ 4.6. Seien  $A, B, C, U$  Mengen, sodass  $A, B, C$  Teilmengen von  $U$  sind. Dann gilt:

- (1)  $B \setminus A = B \cap (\complement_U A)$ ,
- (2)  $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$ ,
- (3) (*De Morgansche Regeln*)  $\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$  und  $\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$ .

Mit  $\emptyset$  bezeichnen wir die leere Menge, die kein Element enthält. Für jede Menge  $A$  gilt  $\emptyset \subseteq A$  und  $A \setminus A = \emptyset$ .

DEFINITION 4.7. Seien  $A, B$  Mengen. Mit  $A \Delta B$  bezeichnen wir die Menge

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A \Delta B$  heißt die *symmetrische Differenz* von  $A$  und  $B$ .

SATZ 4.8. Seien  $A, B, C$  Mengen. Es gilt:

- (1)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
- (2)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .
- (3)  $A \Delta B = B \Delta A$ .
- (4)  $A \Delta \emptyset = A$ .
- (5)  $A \Delta A = \emptyset$ .
- (6)  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ .

DEFINITION 4.9. Sei  $A$  eine Menge. Dann ist die Menge  $\mathcal{P}(A)$ , die *Potenzmenge* von  $A$ , definiert durch

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Es gilt etwa  $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .

SATZ 4.10. Sei  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Dann hat  $\mathcal{P}(A)$  genau  $2^n$  Elemente.

Wenn eine Menge  $A$  genau  $n$  verschiedene Elemente hat (mit  $n \in \mathbb{N}_0$ ), so schreiben wir  $|A| = n$  (oder  $\#A = n$ ). Eine solche Menge nennen wir auch  $n$ -elementig, und wir sagen,  $n$  ist die *Kardinalität* der Menge. Eine Menge, für die es kein solches  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt, bezeichnen wir als *unendlich*. Manchmal schreibt man  $|A| = \infty$ . Eine genauere Unterscheidung zwischen “verschieden großen” unendlichen Mengen werden wir später vornehmen.

Es gibt also auch Mengen, deren Elemente alle Mengen sind. Wir geben jetzt der Vereinigung aller Elemente einer Menge und dem Durchschnitt aller Elemente einer Menge eine Abkürzung.

DEFINITION 4.11. Sei  $\mathcal{A}$  eine Menge, deren Elemente alle Mengen sind. Mit  $\bigcup \mathcal{A}$  oder  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  bezeichnen wir die Menge, die durch

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

definiert ist.

Beispiel:  $\bigcup \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 5, \emptyset\}\} = \{\emptyset, 1, 2, 5\}$ ,  $\bigcup \{]n, n+1[ \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]n, n+1[ = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \geq 1\} \setminus \mathbb{N}$ . Weiters gilt  $\bigcup \emptyset = \emptyset$ .

DEFINITION 4.12. Sei  $\mathcal{A}$  eine nichtleere Menge, deren Elemente alle Mengen sind. Mit  $\bigcap \mathcal{A}$  oder  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  bezeichnen wir die Menge, die durch

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

definiert ist.

Beispiel:  $\bigcap \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}\} = \{2\}$ ,  $\bigcap \{]n, n+1[ \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]n, n+1[ = \emptyset$ .



## KAPITEL 5

# Relationen und Funktionen

### 1. Geordnete Paare

Als erstes definieren wir *geordnete Paare*.

DEFINITION 5.1. Für beliebige  $a, b$  definieren wir das *geordnete Paar*  $(a, b)$  durch

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

SATZ 5.2. Für alle  $a, b, c, d$  gilt  $(a, b) = (c, d)$  genau dann, wenn  $a = c$  und  $b = d$ .

DEFINITION 5.3. Seien  $A, B$  Mengen. Wir definieren  $A \times B$ , das *kartesische Produkt* von  $A$  und  $B$ , durch

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

SATZ 5.4. Seien  $A, B, X, Y$  Mengen. Dann gilt

- (1)  $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$ ,
- (2)  $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$ ,
- (3)  $\emptyset \times B = \emptyset$ .
- (4) Wenn  $A \times B = \emptyset$ , so gilt  $A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset$ .

### 2. Relationen

DEFINITION 5.5. Seien  $A, B$  Mengen. Jede Teilmenge von  $A \times B$  heißt auch *Relation* von  $A$  nach  $B$ .

Beispiele: Sei  $A := \{W, N, O, S, T, V, B, St, K\}$  die Menge der neun österreichischen Bundesländer, und sei  $B := \{Donau, Inn, Traun\}$ .  $R := \{(a, b) \in A \times B \mid a \text{ besitzt einen Teil des Ufers von } b\}$ . Wir erhalten  $R = \{(W, Donau), (N, Donau), (O, Donau), (T, Inn), (O, Inn), (St, Traun), (O, Traun)\}$ . Für  $(a, b) \in R$  schreiben wir auch  $a R b$ .

Sei  $A := \mathbb{R}$  und  $B := \mathbb{Z}$ . Wir definieren eine Relation  $\rho$  durch

$$a \rho b \Leftrightarrow a \in [b, b + 1[$$

für  $a \in A, b \in B$ . Dann gilt zum Beispiel  $(\pi, 3) \in \rho, (\sqrt{2}, 1) \in \rho$ . Es gilt also  $\rho = \{(r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid n \leq r < n + 1\}$ .

Sei nun  $A := \mathbb{N}$  und  $B := \mathbb{N}$ . Wir definieren eine Relation  $K$  durch

$$(a, b) \in K \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}_0 : a + c = b$$

für  $a \in A, b \in B$ . Wir sehen, dass  $K = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ .  $K$  ist also die “kleiner-gleich”-Relation.

Nun definieren wir eine Relation  $\equiv_5$  von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$  durch

$$a \equiv_5 b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : 5 \cdot c = b - a.$$

Es gilt also

$$\equiv_5 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b - a \text{ ist Vielfaches von } 5\}.$$

### 3. Funktionen

**DEFINITION 5.6.** Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $R$  eine Relation von  $A$  nach  $B$ .  $R$  ist eine *funktionale Relation von  $A$  nach  $B$* , wenn es für alle  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  gibt, sodass  $(a, b) \in R$ .

Beispiele: Seien  $A := \{1, 2, 3\}, B := \{a, b, c\}, R := \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$ . Dann ist  $R$  eine funktionale Relation von  $A$  nach  $B$ .

Sei  $A := \mathbb{R}, B := \mathbb{R}, f := \{(r, \sin(r)) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . Dann ist  $f$  eine funktionale Relation von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

Sei  $A := \mathbb{R}, B := \mathbb{R}, g := \{(\sin(r), r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . Dann ist  $g$  keine funktionale Relation von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , da es kein  $y \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $(-2, y) \in g$ .

Sei  $A := [-1, 1], B := \mathbb{R}, h := \{(\sin(r), r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . Dann ist  $h$  keine funktionale Relation von  $A$  nach  $\mathbb{R}$ , da  $(0, 0) \in h$  und  $(0, \pi) \in h$ . Somit gibt es für  $a := 0$  mehr als ein  $b \in \mathbb{R}$ , sodass  $(a, b) \in h$ .

**DEFINITION 5.7.** Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine funktionale Relation von  $A$  nach  $B$ . Für  $a \in A$  bezeichnen wir mit  $f(a)$  dann jenes  $b \in B$ , für das  $(a, b) \in f$ .

Funktionale Relationen von  $A$  nach  $B$  bezeichnen wir auch einfach als *Funktionen von  $A$  nach  $B$* . Funktionen kann man auf verschiedene Arten angeben. Wir betrachten einige gebräuchliche Varianten für die Quadratfunktion  $q$  auf den ganzen Zahlen.

- (1) Direkt als Menge:  $q := \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ . Die Menge kann natürlich auch anders angegeben werden, zum Beispiel durch  $q := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$ .
- (2) Durch eine Zuordnungsvorschrift:

$$q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto x^2.$$

Man liest das als “ $q$  ist eine Funktion von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$ , die jedes  $x$  in  $\mathbb{Z}$  auf  $x^2$  abbildet.

- (3) Durch Angabe des Funktionswerts, also etwa so:  $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, q(z) := z^2$  für  $z \in \mathbb{Z}$ . (Lies: “ $q$  ist eine Funktion von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$ , und  $q(z)$  ist gleich  $z^2$  für alle  $z \in \mathbb{Z}$ .”)

Egal, welche der drei Varianten man wählt:  $q$  ist dadurch jedesmal als die gleiche Teilmenge von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definiert. Die Schreibweise  $f : A \rightarrow B$  bedeutet *f ist eine Funktion von A nach B*, also einfach *f ist eine funktionale Relation von A nach B*.

DEFINITION 5.8 (Einschränkung). Seien  $A, B$  Mengen, sei  $T$  eine Teilmenge von  $A$ , und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Mit  $f|_T$  bezeichnen wir die Funktion, die durch

$$\begin{aligned} f &: T \longrightarrow B \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

gegeben ist. Sie heißt *Einschränkung von f auf T*.

Es gilt also  $f|_T = \{(x, y) \in f \mid x \in T\}$ .

DEFINITION 5.9. Seien  $A, B$  Mengen. Mit  $B^A$  bezeichnet man die Menge aller Funktionen von  $A$  nach  $B$ . Genauer:

$$B^A := \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f : A \rightarrow B\}.$$

SATZ 5.10. Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , und sei  $A = \{1, \dots, m\}$ ,  $B := \{1, \dots, n\}$ . Dann hat  $B^A$  genau  $n^m$  Elemente.

#### 4. Definitions- und Wertebereich

DEFINITION 5.11. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Dann ist  $A$  auch der *Definitionsbereich* von  $f$ . Der *Wertebereich* von  $f$  ist die Menge  $\{f(a) \mid a \in A\}$ .

Der Wertebereich einer Funktion enthält also jene Elemente in  $B$ , die tatsächlich als Funktionswert auftreten.

DEFINITION 5.12. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Sei  $T \subseteq A$ . Dann bezeichnen wir mit  $f[T]$  das *Bild von T unter f*, das wir mit

$$f[T] = \{f(t) \mid t \in T\}$$

definieren.

Wenn keine Verwechslungen möglich sind, so schreibt man auch  $f(T)$  anstelle von  $f[T]$ . Für die Sinusfunktion  $\sin$  von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ist der Wertebereich also das Intervall  $[-1, 1]$ . Außerdem gilt  $\sin[\{n \cdot \frac{\pi}{4} \mid n \in \mathbb{N}\}] = \{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$ .

SATZ 5.13. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Seien  $C, D \subseteq A$ . Dann gilt

- (1)  $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ ,
- (2)  $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ .

DEFINITION 5.14. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ .

(1) Die Funktion  $f$  ist *injektiv*, wenn

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

gilt.

(2) Die Funktion  $f$  ist *surjektiv auf  $B$* , wenn es für alle  $b \in B$  ein  $a \in A$  gibt, sodass  $f(a) = b$ .

(3) Die Funktion  $f$  ist *bijektiv von  $A$  nach  $B$* , wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Die Funktion  $f$  ist also injektiv, wenn es kein  $x, y \in A$  mit  $x \neq y$  und  $f(x) = f(y)$  gibt.

SATZ 5.15. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Sei

$$g := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}.$$

Dann sind äquivalent:

(1)  $g$  ist eine Funktion von  $B$  nach  $A$ .

(2)  $f$  ist eine bijektive Funktion von  $A$  nach  $B$ .

DEFINITION 5.16. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine bijektive Funktion von  $A$  nach  $B$ . Die Funktion  $g : B \rightarrow A$  mit  $g = \{(b, a) \in B \times A \mid f(a) = b\}$  heißt *die zu  $f$  inverse Funktion*, und wird mit  $f^{-1}$  abgekürzt.

Die gleiche Schreibweise,  $f^{-1}$ , verwendet man auch für etwas anderes:

DEFINITION 5.17. Seien  $A, B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Sei  $D \subseteq B$ . Dann bezeichnet man mit  $f^{-1}[D]$  (oder  $f^{-1}(D)$ ) die Menge, die durch

$$f^{-1}[D] := \{a \in A \mid f(a) \in D\}$$

gegeben ist.

## 5. Familien und Folgen

Wir können es bestimmt nicht besser formulieren als P. Halmos [Halmos, 1976, S. 48].

Gelegentlich wird der Wertebereich einer Funktion für wichtiger gehalten als die Funktion selbst. In einem solchen Falle werden Terminologie und Notation stark verändert. Sei zum Beispiel  $x$  eine Funktion von einer Menge  $I$  in eine Menge  $X$ . [...] Wir wollen jetzt ein Element des Definitionsbereiches  $I$  einen *Index* und  $I$  selbst die *Indexmenge* nennen; der Wertebereich der Funktion  $x$  soll *indizierte Menge* und die Funktion selbst *Familie* heißen; der Wert der Funktion an einer Stelle  $i$ , *Term* der Familie genannt, wird (anstelle von  $x(i)$ ) nun  $x_i$  geschrieben.

DEFINITION 5.18. Seien  $I, X$  Mengen, und sei  $x$  eine Funktion von  $I$  nach  $X$ . Wir schreiben  $x_i$  für  $x(i)$ . Wir definieren nun  $\langle x_i | i \in I \rangle$  durch

$$\langle x_i | i \in I \rangle := \{(i, x_i) | i \in I\}.$$

Es gilt also  $x = \langle x_i | i \in I \rangle$ .

Für  $\langle x_i | i \in I \rangle$  schreibt man auch  $(x_i)_{i \in I}$ . Etwas allgemeiner schreibt man für eine Funktion  $f$  von  $A$  nach  $B$  und eine Teilmenge  $C$  von  $A$  auch

$$\langle f(c) | c \in C \rangle \text{ oder } (f(c))_{c \in C}$$

für die Menge  $\{(c, f(c)) | c \in C\}$ .

DEFINITION 5.19. Sei  $A$  eine Menge, sei  $n \in \mathbb{N}$ , und seien  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Mit dem  $n$ -Tupel  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  meinen wir die Familie  $\langle a_i | i \in \{1, \dots, n\} \rangle$ .

Ein  $n$ -Tupel  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  sehen wir also als eine mit der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$  indizierte Familie an. Das  $n$ -Tupel  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  schreiben wir auch als  $(a_1, \dots, a_n)$ ; dass jetzt  $(a, b)$  zwei verschiedene (aber in der Praxis sehr ähnliche) Bedeutungen haben kann, stört meist nicht.

DEFINITION 5.20. Sei  $A$  eine Menge, und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $A^n$  bezeichnen wir die Menge aller  $n$ -Tupel aus  $A$ , also

$$A^n := \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle | a_1, \dots, a_n \in A\} = \{f | f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A\}.$$

DEFINITION 5.21. Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine mit  $I$  indizierte Familie von Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} X_i &:= \{x : I \rightarrow \bigcup \{X_i | i \in I\} \mid \forall i \in I : x(i) \in X_i\} \\ &= \{(x_i)_{i \in I} | (x_i)_{i \in I} \text{ ist eine Familie mit } \forall i \in I : x_i \in X_i\}. \end{aligned}$$

Wenn alle  $X_i$  die gleiche Menge  $X$  sind, erhält man  $\prod_{i \in I} X_i = X^I$ . Die Menge der reellen Zahlenfolgen ist also zum Beispiel genau die Menge  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Jetzt können wir noch ein Axiom der Mengenlehre angeben, das nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre folgt. Es hat so überraschende Konsequenzen, dass man seine Verwendung, im Unterschied zur Verwendung der anderen Axiome der Mengenlehre, manchmal explizit macht, und etwa schreibt: "unter Verwendung des Auswahlaxioms gilt".

AXIOM 5.22 (Auswahlaxiom). Sei  $I$  eine Menge, und sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen. Wir nehmen an, dass für alle  $i \in I$  die Menge  $X_i$  nicht leer ist. Dann ist auch  $\prod_{i \in I} X_i$  nicht leer.

In einer anderen Formulierung:

Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Funktion  $f$  mit Definitionsbereich  $I$ , sodass für alle  $i \in I : f(i) \in X_i$  gilt.

Ein solches  $f$  heißt auch *Auswahlfunktion*; daher der Name *Auswahlaxiom*.

Im Jahr 1937 zeigte K. Gödel: wenn die üblichen Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind, so sind auch die Axiome zusammen mit dem Auswahlaxiom widerspruchsfrei. Das Auswahlaxiom bringt also keine "neuen" Widersprüche.

Im Jahr 1963 zeigte P. Cohen, dass man auch das Gegenteil des Auswahlaxioms, also die Existenz einer Familie nichtleerer Mengen, für die es keine Auswahlfunktion gibt, annehmen kann, ohne dadurch neue Widersprüche zu erhalten. Wenn also die üblichen Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind, so sind auch die Axiome zusammen mit der Negation des Auswahlaxioms widerspruchsfrei.

Das Auswahlaxiom ist also unabhängig von den anderen Axiomen der Mengenlehre; seine Wahrheit wird von den anderen Axiomen nicht bestimmt. Legt man nur die üblichen Axiome der Mengenlehre zu Grunde, liegt das Auswahlaxiom also im "gesetzlich nicht geregelten Raum".

Wir werden das Auswahlaxiom als gültig voraussetzen.

#### ÜBUNGSAUFGABEN 5.23.

- (1) (Funktionen) Für eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  und  $A \subseteq X$  schreiben wir  $f[A]$  für  $\{f(a) \mid a \in X\}$ . Für welche Funktionen gilt, dass für alle Teilmengen  $A, B$  von  $X$  die Menge  $f[A \cap B]$  gleich  $f[A] \cap f[B]$  ist?

### 6. Hintereinanderausführung von Funktionen

DEFINITION 5.24. Seien  $A, B, C$  Mengen, sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ , und sei  $g$  eine Funktion von  $B$  nach  $C$ . Wir definieren  $g \circ f$  durch

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \longrightarrow C \\ a &\longmapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

Die Funktion  $g \circ f$  heißt die *Hintereinanderausführung* oder *funktionale Komposition* von  $f$  und  $g$ . Man spricht "g nach f" für  $g \circ f$ .

SATZ 5.25 (Assoziativität der Hintereinanderausführung). Seien  $A, B, C, D$  Mengen, und sei  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$ . Dann gilt  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

SATZ 5.26. Seien  $A, B, C$  Mengen, sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ , und sei  $g$  eine Funktion von  $B$  nach  $C$ .

- (1) Wenn  $g \circ f$  surjektiv auf  $C$  ist, so ist auch  $g$  surjektiv auf  $C$ .
- (2) Wenn  $g \circ f$  injektiv ist, so ist auch  $f$  injektiv.

Mit  $\text{id}_A$  bezeichnen wir die Funktion von  $A$  nach  $A$  mit  $\text{id}_A(x) = x$  für alle  $x \in A$ .

**SATZ 5.27.** *Seien  $A, B$  Mengen, sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ , und seien  $l, r$  Funktionen von  $B$  nach  $A$ . Wenn  $l \circ f = \text{id}_A$  und  $f \circ r = \text{id}_B$ , so ist  $f$  bijektiv, und es gilt  $l = r = f^{-1}$ .*

**SATZ 5.28.** *Seien  $A, B, C$  Mengen, sei  $f$  eine bijektive Funktion von  $A$  nach  $B$ , und sei  $g$  eine bijektive Funktion von  $B$  nach  $C$ . Dann ist  $g \circ f$  eine bijektive Funktion von  $A$  nach  $C$ , und es gilt  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .*



**Teil 3**

**Vektorräume**



## Unterräume des $\mathbb{R}^n$

### 1. Die Definition eines Unterraums

Mengen, mit denen man so rechnen kann wie mit Vektoren, werden wir als *Vektorräume* bezeichnen. Wir behandeln zunächst den für die Geometrie wichtigsten Vektorraum, nämlich  $\mathbb{R}^3$ , und, in Verallgemeinerung davon, für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , den Vektorraum

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  schreiben wir  $x(i)$ ,  $x[i]$ , und  $x_i$  für den  $i$ -ten Eintrag von  $x$ .

Manche Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen bezüglich der Addition von Vektoren und der Multiplikation mit reellen Zahlen. Solche Teilmengen bezeichnen wir als *Unterräume* des  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINITION 6.1.  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  ist *Unterraum* des  $\mathbb{R}^n$  : $\Leftrightarrow$

- (1) Die Menge  $T$  enthält zumindest ein Element.
- (2) Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und für alle  $t \in T$  gilt  $\lambda \cdot t \in T$ .
- (3) Für alle  $s, t \in T$  gilt  $s + t \in T$ .

Wir geben einige Beispiele von Unterräumen des  $\mathbb{R}^n$  :

BEISPIELE 6.2.

- (1)  $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$  ist Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ . Begründung: Wegen  $(0, 0) \in T_1$  ist die Menge  $T_1$  nicht leer. Sei  $(u, v) \in T_1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $2u - 3v = 0$  und damit  $2(\lambda u) - 3(\lambda v) = 0$ , also gilt  $\lambda \cdot (u, v) \in T_1$ . Für  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in T_1$  gilt  $2 \cdot (u_1 + u_2) - 3 \cdot (v_1 + v_2) = 2u_1 - 3v_1 + 2u_2 - 3v_2 = 0$ , also ist  $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) \in T_1$ .

Damit haben wir gezeigt, dass  $T_1$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^2$  ist.

- (2)  $T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 1\}$  ist kein Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ , denn  $(1, -1) \in T_2$ , aber  $2 \cdot (1, -1) \notin T_2$ .
- (3)  $T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{es gibt } s, t \in \mathbb{R}, \text{ sodass } (x, y, z) = s \cdot (1, -2, 4) + t \cdot (0, 1, 8)\}$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ .

- (4)  $T_4 = \{(0, 0)\}$  ist Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ .  
 (5)  $T_5 = \{(0, 1)\}$  ist kein Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ , da  $2 \cdot (0, 1) \notin T_5$ .

### ÜBUNGSAUFGABEN 6.3.

- (1) Vervollständigen Sie die folgenden Begründungen dafür, dass die Menge

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \text{es gibt } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Unterraumeigenschaften (V1) und (V2) erfüllt.

- (a)  $T$  ist nicht die leere Menge, weil \_\_\_\_\_  
 (b) Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $t \in T$  liegt  $\lambda \cdot t$  in  $T$ : Wir fixieren  $t$  aus  $T$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir wollen zeigen, dass \_\_\_\_\_ in \_\_\_\_\_ liegt. Da  $t$  in  $T$  liegt, gibt es ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodass  $t = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Um zu zeigen, dass  $\lambda \cdot t$  in  $T$  liegt, müssen wir ein  $\alpha' \in \mathbb{R}$  finden, sodass

$$\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$

Nun wissen wir, dass  $t = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist. Daher gilt  $\lambda \cdot t = \underline{\hspace{2cm}}$ . Das heißt, dass für  $\alpha' = \underline{\hspace{2cm}}$  gilt:

$$\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher liegt auch \_\_\_\_\_ in  $T$ .

- (2) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes  $\mathbb{R}^2$ ? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.  
 (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0 \right\}$ .  
 (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 1 \right\}$ .  
 (3) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes  $\mathbb{R}^2$ ? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.  
 (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ .  
 (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ .  
 (4) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes  $\mathbb{R}^2$ ? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.  
 (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 0 \right\}$ .  
 (b)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^2 = 0 \right\}$ .  
 (5) Zeigen Sie: Wenn ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^n$  als Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ) zwei Punkte enthält, so enthält er bereits die gesamte Verbindungsgerade.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit rechter Seite = 0 ist immer ein Unterraum.

**SATZ 6.4.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems  $A \cdot x = 0$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Sei  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$ .

- (1) Wegen  $0 \in U$  ist  $U$  nicht die leere Menge.  
 (2) Sei  $x \in U$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\lambda(A \cdot x) = A \cdot (\lambda x) = 0$ , d.h.  $\lambda x \in U$ .  
 (3) Seien  $u, v \in U$ . Dann gilt  $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v = 0$ , d.h.  $u + v \in U$ .

Somit ist  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . ■

**AUFGABE 6.5.** Wir bestimmen diesen Unterraum für die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Als

Lösungsmenge von  $A \cdot x = 0$  erhalten wir

$$L = \{(-2t, -3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

## 2. Die lineare Hülle von Vektoren

DEFINITION 6.6. Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ , und seien  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ . Die Menge

$$L(v_1, \dots, v_m) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt die *lineare Hülle* der Vektoren  $v_1, \dots, v_m$ .

$L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$  ist also die Gerade im  $\mathbb{R}^2$ , die durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$  geht.  $L(\cdot)$  definiert man als  $\{\vec{0}\}$ .

Die lineare Hülle von  $v_1, \dots, v_m$  ist der kleinste Unterraum, der  $v_1, \dots, v_m$  enthält:

SATZ 6.7. Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und seien  $v_1, \dots, v_m$  Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

- (1)  $L(v_1, \dots, v_m)$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Sei  $M$  ein Unterraum der  $v_1, \dots, v_m$  enthält. Dann gilt  $L(v_1, \dots, v_m) \subseteq M$ .

Wollen wir etwa überprüfen, ob z.B.  $(3, 0, 1)$  in der linearen Hülle von  $(2, 1, -3)$  und  $(7, 2, -5)$  liegt, müssen wir ein Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das heißt  $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Lösen wir dieses System, so erhalten wir  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = 1$ . Also ist  $(3, 0, 1)$  eine Linearkombination von  $(2, 1, -3)$  und  $(7, 2, -5)$ , und liegt somit in der linearen Hülle dieser beiden Vektoren.

SATZ 6.8. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , seien  $b_1, b_2, \dots, b_m$  Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $\bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  die Matrix mit den Vektoren  $b_1, b_2, \dots, b_m$  als Spaltenvektoren. Dann liegt  $v$  genau dann in  $L(b_1, \dots, b_m)$ , wenn das Gleichungssystem  $\bar{B} \cdot x = v$  eine Lösung  $x \in \mathbb{R}^m$  hat.

### ÜBUNGSAUFGABEN 6.9.

- (1) Liegt  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  in der linearen Hülle von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ?
- (2) Liegt  $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$  in der linearen Hülle von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ?
- (3) Testen Sie, ob  $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$  in der linearen Hülle von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  liegt.

Sei nun  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl, und sei  $M$  eine (möglicherweise unendliche) Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren die lineare Hülle von  $M$  als

$$L(M) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot m_i \mid k \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, m_1, \dots, m_k \in M \right\}.$$

Die lineare Hülle von  $M$  ist also die Menge aller Linearkombinationen endlich vieler Vektoren aus  $M$ .

DEFINITION 6.10. Für eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  mit Einträgen aus  $\mathbb{R}$  definieren wir ihren *Zeilenraum*  $Z(A)$  als die lineare Hülle der Zeilen von  $A$ . Der Zeilenraum ist ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .

Den *Spaltenraum*  $S(A)$  definieren wir als die lineare Hülle der Spalten von  $A$ . Der Spaltenraum ist ein Unterraum von  $\mathbb{R}^m$ .

Den *Nullraum*  $N(A)$  definieren wir als die Lösungsmenge des Gleichungssystems  $A \cdot x = 0$ . Er ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

DEFINITION 6.11. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und seien  $v_1, \dots, v_m$  in  $\mathbb{R}^n$ . Die Folge  $(v_1, \dots, v_m)$  heißt *linear unabhängig*, wenn für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  mit

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = 0$$

gilt, dass alle  $\lambda_i = 0$  sind.

Man sagt dann oft auch einfach, dass die Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig sind. Als Spezialfall definiert man noch für  $m = 0$ , dass die Folge  $()$  aus 0 Vektoren immer linear unabhängig ist.

Vektoren  $v_1, \dots, v_m$ , die nicht linear unabhängig sind, nennt man *linear abhängig*. Die Folge  $(v_1, \dots, v_m)$  ist also genau dann linear abhängig, wenn es  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$  gibt, sodass  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i = 0$ .

AUFGABE 6.12. Sind  $(3, 2)$  und  $(1, 3)$  linear unabhängig ?

*Lösung.* Wir betrachten

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System besitzt nur die Lösung  $(0, 0)$ . Daher sind die beiden Vektoren linear unabhängig.

AUFGABE 6.13. Sind  $(3, 2)$ ,  $(1, 4)$  und  $(5, 3)$  linear unabhängig ?

*Lösung.* Hier erhalten wir

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des Gleichungssystems ist  $\lambda_1 = -1.7$ ,  $\lambda_2 = 0.1$  und  $\lambda_3 = 1$ . Die drei Vektoren sind also linear abhängig.

**SATZ 6.14.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , seien  $b_1, b_2, \dots, b_m$  Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $\bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  die Matrix mit den Vektoren  $b_1, b_2, \dots, b_m$  als Spaltenvektoren. Dann sind  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  genau dann linear abhängig, wenn das System  $\bar{B} \cdot x = 0$  eine Lösung  $x \neq 0$  hat.

**SATZ 6.15.** Sei  $m \geq 1$  und seien  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$ . Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $(b_1, \dots, b_m)$  ist linear abhängig.
- (2) Es gibt ein  $k \in \{1, \dots, m\}$ , sodass  $b_k$  in  $L(b_1, \dots, b_{k-1})$  liegt.

**SATZ 6.16.** Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ , sei  $n \in \mathbb{N}$ , und seien  $v_1, \dots, v_m, v \in \mathbb{R}^n$ . Wir nehmen an, dass  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig sind. Dann sind äquivalent:

- (1)  $v \in L(v_1, \dots, v_m)$ .
- (2)  $(v_1, \dots, v_m, v)$  ist linear abhängig.

#### ÜBUNGSAUFGABEN 6.17.

- (1) Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}\right)$  linear abhängig sind, indem Sie eine Linearkombination finden, bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird, und die trotzdem den Nullvektor ergibt.
- (2) Testen Sie jeweils, ob folgende Mengen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird.
  - (a)  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ .
  - (b)  $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ .
- (3) Sind  $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -25 \end{pmatrix}\right)$  linear abhängig?
- (4) Sind die Vektoren  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}\right)$  linear abhängig?
- (5) Geben Sie einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  an, sodass  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $v$  linear abhängig sind.
- (6) Finden Sie drei Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ , sodass  $(b, c)$  linear unabhängig und  $(a, b, c)$  linear abhängig sind.
- (7) Vervollständigen Sie die Begründung für folgende Aussage.

Seien  $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $w$  in der linearen Hülle von  $v_1$  und  $v_2$  liegt. Dann sind  $(v_1, v_2, w)$  linear abhängig.

*Begründung:* Da  $w$  in der linearen Hülle von  $v_1$  und  $v_2$  liegt, gibt es  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , sodass

$$w = \underline{\hspace{10em}}$$

Daher gilt

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \underline{\hspace{2em}} = 0.$$

Das ist eine Linearkombination, die 0 ergibt, obwohl nicht jeder Vektor  $\underline{\hspace{2em}}$  mal genommen wurde. Daher sind  $(v_1, v_2, w)$   $\underline{\hspace{2em}}$ .

## 4. Basen eines Vektorraums

### 4.1. Definition.

**DEFINITION 6.18.** Sei  $T$  Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ . Die Folge  $B = (b_1, \dots, b_m)$  heißt Basis von  $T$  : $\Leftrightarrow$

- (1)  $(b_1, \dots, b_m)$  ist linear unabhängig,  
 (2)  $L(b_1, \dots, b_m) = T$ .

Wir geben einige Beispiele:

BEISPIEL 6.19.

- (1)  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  ist Basis des  $\mathbb{R}^2$ : Jeder Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  lässt sich als

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, und liegt somit in der linearen Hülle von  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ . Somit ist die lineare Hülle der Vektoren  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  der ganze  $\mathbb{R}^2$ . Die beiden Vektoren sind außerdem linear unabhängig.

- (2)  $\{(2, 3)\}$  ist keine Basis des  $\mathbb{R}^2$ , da es kein  $\lambda$  gibt, sodass  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  
 (3)  $\{(2, 3)\}$  ist Basis von  $L((2, 3))$ .

Sei  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist eine Basis eine Möglichkeit, die Menge  $U$  anzugeben. Mathematica nutzt das, um die Lösungen des Gleichungssystems  $A \cdot x = 0$  durch die Funktion `NullSpace` auszugeben. Dabei wird die (möglicherweise unendliche) Menge  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$  durch eine Basis dieses Raums angegeben.

`In [50] := A = {{1, 2, 3}}`

`Out [50] = {{1, 2, 3}}`

`In [51] := NullSpace [A]`

`Out [51] = {{-3, 0, 1}, {-2, 1, 0}}`

ÜBUNGSAUFGABEN 6.20.

- (1) Finden Sie eine Basis  $B$  der Ebene  $L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$ , die weder  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  noch  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  enthält.

**4.2. Bestimmen der Basis eines Unterraums.** Wir können Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  auf zwei Arten angeben.

- explizit, das heißt, als lineare Hülle von Vektoren.
- implizit, das heißt, durch ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge der anzugebende Unterraum ist.

Wir überlegen uns als erstes, wie wir eine Basis eines explizit gegebenen Unterraums berechnen können. Dazu berechnen wir die Basis des Raums

$$V = L\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -33 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 85 \\ -44 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Wir wollen also eine Basis des Zeilenraums der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -33 & 17 & 1 & -1 \\ 85 & -44 & -3 & 2 \\ -19 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Der Zeilenraum ändert sich nicht, wenn wir eine Zeile mit einer von 0 verschiedenen Zahl multiplizieren, oder wenn wir zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addieren. Wir können uns also jetzt systematisch Matrizen erzeugen, die alle den gleichen Zeilenraum haben wie die ursprüngliche Matrix. Das machen wir mit Mathematica.

```
In[52] := << RowRed9.m
```

```
In[53] := RowEchelonForm[{{-5, 3, 1, 1}, {-33, 17, 1, -1}, {85, -44, -3, 2}, {-19, 10, 1, 0}}]
```

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -33 & 17 & 1 & -1 \\ 85 & -44 & -3 & 2 \\ -19 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -28 & -38 \\ 0 & 7 & 14 & 19 \\ 0 & -7 & -14 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -28 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Out[53] = {{{1, 0, 0, 0}, {-33, 5, 0, 0}, {1, 5, 2, 0}, {-5, -5, 0, 10}},
            {{-5, 3, 1, 1}, {0, -14, -28, -38}},
            {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}
```

Wir haben also eine Matrix in Zeilenstaffelform erzeugt, deren Zeilenraum der gleiche wie der Zeilenraum der gegebenen Matrix ist.

ALGORITHMUS 6.21 (Zeilenstaffelform).

Eingabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ .

Ausgabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $B$ , sodass  $B$  in Zeilenstaffelform ist, und  $Z(A) = Z(B)$ .

```

1   $B \leftarrow A$ 
2   $zeile \leftarrow 1$ 
3   $spalte \leftarrow 1$ 
4  while  $zeile \leq m$ 
5      do while  $spalte \leq n$  und  $B(i, spalte) = 0$  für alle  $i$  mit  $zeile \leq i \leq m$ 
6          do  $spalte \leftarrow spalte + 1$ 
7          if  $spalte \leq n$ 
8              then  $gewaehlteZeile \leftarrow$  ein  $i$ , sodass  $zeile \leq i \leq m$  und  $B(i, spalte) \neq$ 
9                  0
10                 if  $gewaehlteZeile \neq zeile$ 
11                 then Vertausche die  $gewaehlteZeile$ -te mit der  $zeile$ -ten
12                 Zeile von  $B$ 
13                  $i \leftarrow zeile + 1$ 
14                 while  $i \leq m$ 
15                 do Addiere passendes Vielfaches der  $zeile$ -ten Zeile zur
16                  $i$ -ten Zeile von  $B$ , sodass  $B(i, spalte) = 0$ 
17                  $i \leftarrow i + 1$ 
18              $zeile \leftarrow zeile + 1$ 
19              $spalte \leftarrow spalte + 1$ 
20 return  $B$ 

```

Dieser Algorithmus liefert also folgenden Satz.

SATZ 6.22. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann gibt es eine Matrix  $B$  in Zeilenstaffelform, sodass  $Z(A) = Z(B)$ .

Die Zeilen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die nicht 0 sind, sind linear unabhängig. Daher haben wir auch eine Basis von

$$V = L((-5, 3, 1, 1), (-33, 17, 1, -1), (85, -44, -3, 2), (-19, 10, 1, 0))$$

gefunden, nämlich

$$B = \left( \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -28 \\ -38 \end{pmatrix} \right).$$

Wir fassen zusammen:

ALGORITHMUS 6.23 (Basis eines explizit gegebenen Unterraums).

Eingabe: Vektoren  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ .

Ausgabe: Eine Basis  $b_1, \dots, b_k$  von  $L(v_1, \dots, v_m)$ .

- 1 Bilde die  $m \times n$ -Matrix  $V$ , in deren Zeilen die Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  stehen
- 2 Berechne eine Matrix  $B$  in Zeilenstaffelform, sodass  $Z(V) = Z(B)$

3 **return**  $(b_1, \dots, b_k)$  als jene Zeilen von  $B$ , die nicht 0 sind

Was wir noch nicht begründet haben ist, dass die Zeilen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die nicht 0 sind, linear unabhängig sind. Betrachten wir dazu die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 14 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 67 & 76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass die von 0 verschiedenen Zeilen von  $A$  linear unabhängig sind, müssen wir zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 14 & 67 \\ 7 & 17 & 76 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung  $(0, 0, 0)$  hat. Wir sehen, dass uns die erste Gleichung  $\lambda_1 = 0$ , dann die dritte Gleichung  $\lambda_2 = 0$ , und dann die fünfte Gleichung  $\lambda_3 = 0$  liefert.

Das machen wir jetzt allgemein:

**SATZ 6.24.** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix in Zeilenstaffelform. Dann sind die Zeilen von  $A$ , die nicht 0 sind, linear unabhängige Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Seien  $r \in \mathbb{N}$  und  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$  wie in Definition 3.1. Wir betrachten eine Linearkombination der ersten  $r$  Zeilen von  $A$ , die 0 ist. Seien also  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$  so, dass für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$(6.1) \quad \sum_{l=1}^r \lambda_l \cdot A[l, k] = 0.$$

Wir zeigen jetzt, dass für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  gilt:  $\lambda_i = 0$ . Wir zeigen das mit Induktion nach  $i$ . Betrachten wir die Gleichung 6.1 für  $k := j_1$ . Dann gilt

$$\sum_{l=1}^r \lambda_l \cdot A[l, j_1] = 0.$$

Für  $l \geq 2$  gilt  $A[l, j_1] = 0$ , da Bedingung (3) von Definition 3.1 für  $i := l$  und  $k := j_1$  ergibt, dass  $A(l, j_1) = 0$ . Also gilt  $\lambda_1 \cdot A[1, j_1] = 0$ . Da  $A[1, j_1] \neq 0$ , gilt  $\lambda_1 = 0$ .

Sei nun  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Wir nehmen an, dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{i-1} = 0$ . Wir betrachten die Gleichung 6.1 für  $k := j_i$ . Es gilt dann

$$\sum_{l=1}^r \lambda_l \cdot A[l, j_i] = 0,$$

also

$$\lambda_i \cdot A[i, j_i] + \sum_{l=i+1}^r \lambda_l \cdot A[l, j_i] = 0.$$

Für  $l > i$  ergibt Bedingung (3) von Definition 3.1 (mit  $i' := l$  und  $k' := j_i$ ), dass  $A[l, j_i] = 0$  gilt. Also gilt  $\lambda_i \cdot A[i, j_i] = 0$ . Da  $A[i, j_i] \neq 0$ , gilt auch  $\lambda_i = 0$ .

Es ist also  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ . Also sind die ersten  $r$  Zeilen von  $A$  linear unabhängig. ■

### ÜBUNGSAUFGABEN 6.25.

- (1) Bestimmen Sie eine Basis von  $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ .
- (2) Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume!
  - (a)  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \right\}$ .
  - (b)  $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ .
  - (c)  $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ .

## 5. Die Zeilenstaffelnormalform

Wir studieren folgendes Problem: Gegeben sind zwei Unterräume  $U, V$  von  $\mathbb{R}^n$ . Beide Unterräume sind explizit gegeben, das heißt, durch  $u_1, \dots, u_l$  und  $v_1, \dots, v_m$  so, dass  $U = L(u_1, \dots, u_l)$  und  $V = L(v_1, \dots, v_m)$ . Wir fragen uns nun, ob  $U = V$ .

**DEFINITION 6.26 (Zeilenstaffelnormalform).** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix.  $A$  ist in *Zeilenstaffelnormalform*, wenn es  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $j_1, j_2, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$  gibt, sodass

- (1)  $j_r > j_{r-1} > \dots > j_1$ .
- (2) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  gilt:  $A(i, j_i) = 1$ .
- (3) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und für alle  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$  gilt: Wenn  $k \neq i$ , dann gilt  $A(k, j_i) = 0$ .
- (4) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  und für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $k < j_i$  gilt:  $A(i, k) = 0$ .
- (5) Für alle  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  mit  $i > r$  und für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt:  $A(i, k) = 0$ .

ALGORITHMUS 6.27 (Zeilenstaffelnormalform).

Eingabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ .

Ausgabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $B$ , sodass  $B$  in Zeilenstaffelnormalform ist, und  $Z(A) = Z(B)$ .

```

1   $B \leftarrow A$ 
2   $zeile \leftarrow 1$ 
3   $spalte \leftarrow 1$ 
4  while  $zeile \leq m$ 
5      do (* Die ersten  $spalte - 1$  Spalten sind in Zeilenstaffelnormalform *)
6          while  $spalte \leq n$  und  $B(i, spalte) = 0$  für alle  $i$  mit  $zeile \leq i \leq m$ 
7              do  $spalte \leftarrow spalte + 1$ 
8          if  $spalte \leq n$ 
9              then  $gewaehlteZeile \leftarrow$  ein  $i$ , sodass  $zeile \leq i \leq m$  und  $B(i, spalte) \neq$ 
0
10                 if  $gewaehlteZeile \neq zeile$ 
11                     then Vertausche die  $gewaehlteZeile$ -te mit der  $zeile$ -ten
12                 Zeile von  $B$ 
13                 Multipliziere die  $zeile$ -te Zeile von  $B$  mit  $\frac{1}{B(zeile, spalte)}$ 
14                  $i \leftarrow 1$ 
15                 while  $i \leq m$ 
16                     do if  $i \neq zeile$ 
17                         then Addiere passendes Vielfaches der  $zeile$ -ten
18                         Zeile zur  $i$ -ten Zeile von  $B$ , sodass  $B(i, spalte) = 0$ 
19                          $i \leftarrow i + 1$ 
20                  $zeile \leftarrow zeile + 1$ 
21                  $spalte \leftarrow spalte + 1$ 
22 return  $B$ 

```

Wir geben einige Beispiele für das Berechnen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die Ausgangsmatrix besitzt.

AUFGABE 6.28.

```
In[54] := << RowRed9.m
```

```
In[55] := MatrixForm[A1]
```

```
Out[55] = 
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

```

```
In[56] := RowEchelonNormalForm[A1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 4 & -2 \\ 0 & 17 & -34 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Out [56]} = & \left\{ \left\{ \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{9}{8}, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0 \right\}, \right. \right. \\ & \left. \left\{ \frac{1}{4}, -\frac{5}{16}, -\frac{1}{16}, 0 \right\}, \left\{ -\frac{5}{2}, \frac{9}{8}, \frac{29}{8}, 1 \right\} \right\}, \left\{ \{1, 0, -2, 0, -1\}, \right. \\ & \left. \{0, 1, -2, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}\}, \{0, 0, 0, 0, 0\} \right\} \end{aligned}$$

### AUFGABE 6.29.

`In [57] := << RowRed9.m`

`In [58] := MatrixForm [A2]`

$$\text{Out [58]} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

`In [59] := RowEchelonNormalForm [A2]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -13 & -20 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{13} & -\frac{18}{13} \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out [59]} = \left\{ \left\{ \left\{ -\frac{2}{13}, 0, \frac{5}{13} \right\}, \left\{ \frac{3}{13}, 0, -\frac{1}{13} \right\}, \{-2, 1, 0\} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \left\{ 1, 0, -\frac{9}{13}, -\frac{18}{13} \right\}, \left\{ 0, 1, \frac{20}{13}, \frac{27}{13} \right\}, \{0, 0, 0, 0\} \right\} \right\}$$

AUFGABE 6.30.

`In[60] := << RowRed9.m`

`In[61] := MatrixForm[A3]`

$$\text{Out [61]} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

`In[62] := RowEchelonNormalForm[A3]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Out [62]} = & \left\{ \left\{ \left\{ -\frac{10}{3}, 0, \frac{7}{3}, -5 \right\}, \left\{ \frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 1 \right\}, \right. \right. \\ & \left. \left\{ -\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0 \right\}, \left\{ \frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}, 0 \right\} \right\}, \\ & \left. \left\{ \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 0\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

AUFGABE 6.31.

*In [63] := << RowRed9.m*

*In [64] := MatrixForm [A5]*

$$\text{Out [64]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

*In [65] := RowEchelonNormalForm [A5]*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 14 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -23 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -9 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -23 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -9 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{5} & \frac{76}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{5} & \frac{76}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{76}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{5} & \frac{76}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{67}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{67}{76} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out [65]} = \left\{ \left\{ \left\{ \frac{1}{67}, -\frac{9}{67}, \frac{12}{67}, 0 \right\}, \left\{ -\frac{10}{67}, \frac{23}{67}, \frac{14}{67}, 0 \right\}, \right. \right. \\
 \left. \left. \left\{ \frac{6}{67}, \frac{13}{67}, \frac{5}{67}, 0 \right\}, \{-1, -1, -1, 1\} \right\}, \right. \\
 \left. \left\{ \{1, 2, 0, 0, 0, -\frac{32}{67}, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0, -\frac{15}{67}, 0\}, \right. \right. \\
 \left. \left. \{0, 0, 0, 0, 1, \frac{76}{67}, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \right\} \right\}$$

Der Algorithmus liefert den folgenden Satz.

**SATZ 6.32.** *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann gibt es eine Matrix  $B$  in Zeilenstaffelnormform, sodass  $Z(A) = Z(B)$ .*

Mathematica hat einen eigenen Befehl zur Berechnung der Zeilenstaffelnormform, nämlich `RowReduce`.

$$\text{In [66]} := \text{MatrixForm [A1]}$$

$$\text{Out [66]} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{In [67]} := \text{MatrixForm [RowReduce [A1]]}$$

$$\text{Out [67]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 6. Der Nullraum einer Matrix

Wir überlegen uns jetzt, wie wir eine Basis eines implizit gegebenen Unterraums des  $\mathbb{R}^n$  berechnen.

**DEFINITION 6.33** (Skalarprodukt). Seien  $v = (v_1, \dots, v_n)$  und  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ . Wir definieren das Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle$  durch

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

**DEFINITION 6.34.** Sei  $M$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Dann definieren wir

$$M^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle m, v \rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\}.$$

SATZ 6.35. Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann gilt  $N(A) = (Z(A))^\wedge$ .

KOROLLAR 6.36. Sei  $A$  eine  $l \times n$ , und sei  $B$  eine  $m \times n$ -Matrix. Wenn  $Z(A) = Z(B)$ , dann gilt auch  $N(A) = N(B)$ .

Wenn eine Matrix  $B$  in Zeilenstaffelnormalform ist, dann kann man ihren Nullraum  $N(B)$  besonders schnell berechnen.

SATZ 6.37. Sei  $B$  eine  $m \times n$ -Matrix in Zeilenstaffelnormalform, seien  $j_1 < j_2 < \dots < j_r \in \{1, 2, \dots, n\}$  wie in Definition 6.26. Seien  $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-r} \in \{1, 2, \dots, n\}$  so, dass  $\{i_1, \dots, i_{n-r}\} \cup \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Sei  $C$  eine  $(n-r) \times n$ -Matrix, die so definiert ist: Für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n-r\}$  gilt:

- $C(k, i_k) = 1$ ,
- für alle  $s \in \{1, \dots, r\} : C(k, j_s) = -B(s, i_k)$ , und
- für alle  $l \in \{i_1, i_2, \dots, i_{n-r}\} \setminus \{i_k\} : C(k, l) = 0$ .

Dann steht in den Zeilen von  $C$  eine Basis des Nullraumes von  $B$ .

*Beweis.* Wir zeigen als erstes, dass jede Zeile von  $C$  im Nullraum von  $B$  liegt. Sei dazu  $c$  die  $k$ -te Zeile von  $C$ . Wir berechnen jetzt  $B \cdot c$  (dazu stellen wir uns  $c$  als Spaltenvektor vor). Für  $t \in \{1, \dots, r\}$  berechnen wir den  $t$ -ten Eintrag von  $B \cdot c$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} (B \cdot c)[t] &= \sum_{l=1}^n B[t, l] \cdot c[l] \\ &= \sum_{l=1}^n B[t, l] \cdot C[k, l] \\ &= B[t, i_k] \cdot C[k, i_k] + \sum_{s=1}^r B[t, j_s] \cdot C[k, j_s] + \sum_{l \in \{i_1, i_2, \dots, i_{n-r}\} \setminus \{i_k\}} B[t, l] \cdot C[k, l] \\ &= B[t, i_k] \cdot 1 + 1 \cdot C[k, j_t] + 0 \\ &= B[t, i_k] - B[t, i_k] = 0. \end{aligned}$$

Daher gilt  $Z(C) \subseteq N(B)$ .

Bevor wir die Inklusion  $N(B) \subseteq Z(C)$  beweisen, zeigen wir als Vorbereitung folgende Aussage:

Wenn

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

und

$$y = (y(1), y(2), \dots, y(n))$$

Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  sind, sodass  $B \cdot x = 0$ , und  $B \cdot y = 0$  und  $x(i_l) = y(i_l)$  für alle  $l \in \{1, 2, \dots, n-r\}$  gilt, so gilt  $x = y$ .

Das begründen wir so: wir zeigen, dass  $x$  und  $y$  auch an den Stellen  $j_1, \dots, j_r$  übereinstimmen. Sei also  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n B(k, j) \cdot x(j) = 0.$$

Das bedeutet

$$B(k, j_k) \cdot x(j_k) + \sum_{s \in \{1, \dots, r\} \setminus \{k\}} B(k, j_s) \cdot x(j_s) = - \sum_{l=1}^{n-r} B(k, i_l) \cdot x(i_l),$$

also

$$x(j_k) = - \sum_{l=1}^{n-r} B(k, i_l) \cdot x(i_l).$$

Ebenso errechnen wir  $y(j_k) = - \sum_{l=1}^{n-r} B(k, i_l) \cdot y(i_l)$ . Also gilt  $x = y$ .

Nach dieser Vorbereitung zeigen wir  $N(B) \subseteq Z(C)$ . Sei dazu  $x \in N(B)$ . Wir setzen

$$\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(n-r)) := (x(i_1), \dots, x(i_{n-r}))$$

und

$$y := C^T \cdot \alpha.$$

Da  $B \cdot C^T = 0$ , gilt  $B \cdot y = 0$ . Wir zeigen nun, dass für alle  $l \in \{1, 2, \dots, n-r\}$  gilt:

$$y(i_l) = x(i_l).$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} y(i_l) &= (C^T \cdot \alpha)[i_l] \\ &= \sum_{k=1}^{n-r} C(k, i_l) \cdot \alpha(k) \\ &= C(l, i_l) \cdot \alpha(l) \\ &= 1 \cdot x(i_l). \end{aligned}$$

Aus unserer vorbereitenden Bemerkung erhalten wir

$$x = y.$$

Der Vektor  $y$  liegt offensichtlich im Zeilenraum von  $C$ , also gilt  $x \in Z(C)$ .

Wir wissen also jetzt, dass die lineare Hülle der Zeilenvektoren von  $C$  genau  $N(B)$  ist. Jetzt zeigen wir noch, dass die Zeilen von  $C$  linear unabhängig sind. Sei  $\alpha =$

$(\alpha(1), \dots, \alpha(n-r))$  so, dass  $C^T \cdot \alpha = 0$ . Sei  $l \in \{1, 2, \dots, n-r\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (C^T \cdot \alpha)[i_l] \\ &= \sum_{k=1}^{n-r} C(k, i_l) \cdot \alpha(k) \\ &= C(l, i_l) \cdot \alpha(l) \\ &= 1 \cdot \alpha(l). \end{aligned}$$

Daher gilt  $\alpha(l) = 0$ . ■

Wir haben also folgenden Satz gezeigt:

**SATZ 6.38.** *Sei  $B$  eine  $m \times n$ -Matrix in Zeilenstaffelnormalform, und sei  $r$  die Anzahl der Zeilen von  $B$ , die nicht 0 sind. Dann hat  $N(B)$  eine Basis, die genau  $n - r$  Vektoren enthält.*

Wir fassen den konstruktiven Teil des Beweises des Satzes 6.37 nocheinmal zusammen.

**ALGORITHMUS 6.39** (Nullraum einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform).

Eingabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $B$  in Zeilenstaffelnormalform.

Ausgabe: Eine Matrix  $C$ , deren Zeilen eine Basis des Nullraumes von  $B$  sind.

```

1   $r \leftarrow$  Anzahl der Zeilen  $\neq 0$  von  $B$ 
2  for  $s = 1$  to  $r$ 
3      do  $J[s] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid B[s, k] \neq 0\}$ 
4   $C \leftarrow$  die  $(n - r) \times n$ -Matrix mit allen Einträgen 0
5   $freieVariablen \leftarrow$  aufsteigend geordnete Liste der Elemente von  $\{1, \dots, n\} \setminus$ 
    $\{J[s] \mid s \in \{1, \dots, r\}\}$ 
6  for  $k = 1$  to  $n - r$ 
7      do  $i \leftarrow freieVariablen[k]$ 
8          (* die  $i$ -te Variable wird frei gewählt *)
9           $C[k, i] \leftarrow 1$ 
10     for  $s = 1$  to  $r$ 
11         do  $C[k, J[s]] \leftarrow -B[s, i]$ 

```

Als Beispiel berechnen wir den Nullraum von zwei Matrizen in Zeilenstaffelnormalform.

**AUFGABE 6.40.**  $In[68] := (* 1. Beispiel *)$

$In[69] := << RowRed9.m$

$In[70] := B = RowReduce[A6];$

$Out[70] = MatrixForm[B]$

$$\text{In}[71] := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -17 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

`Out[71] = CC = NullSpaceViaREF2[B];`

`MatrixForm[CC]`

$$\text{In}[72] := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

`In[73] :=`

**(\* 2. Beispiel \*)**

`In[74] := B = RowReduce[A5];`

`Out[74] = MatrixForm[B]`

$$\text{In}[75] := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{76}{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

`In[76] := CC = NullSpaceViaREF2[B];`

`Out[76] = MatrixForm[CC]`

$$\text{In}[77] := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{32}{67} & 0 & \frac{15}{67} & 0 & -\frac{76}{67} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## ÜBUNGSAUFGABEN 6.41.

- (1) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum  $U$  des  $\mathbb{R}^4$ , der durch

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

gegeben ist.

Jede Matrix hat den gleichen Zeilenraum wie eine Matrix in Zeilenstaffelnormalform.

**SATZ 6.42.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ , und sei  $A$  eine  $m \times (m + 1)$ -Matrix. Dann enthält der Nullraum von  $A$  einen von 0 verschiedenen Vektor.

### 7. Die Dimension eines Unterraumes

LEMMA 6.43. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $V$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , und seien  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $L(v_1, \dots, v_m) = V$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  und sei  $w := \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ . Sei  $j$  so, dass  $\lambda_j \neq 0$ . Dann gilt

$$L(v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_m) = V.$$

SATZ 6.44 (Austauschsatz von Steinitz). Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $V$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , und seien  $x_1, \dots, x_m$  so, dass  $L(x_1, \dots, x_m) = V$ . Sei  $r \in \mathbb{N}$ , und sei  $(w_1, \dots, w_r)$  eine linear unabhängige Folge von Elementen aus  $V$ . Dann gibt es für alle  $i \in \{0, 1, \dots, \min(r, m)\}$  eine injektive Abbildung  $\pi : \{i+1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , sodass

$$V = L(w_1, \dots, w_i, x_{\pi(i+1)}, \dots, x_{\pi(m)})$$

ist.

*Beweis:* Induktion nach  $i$ . Für  $i = 0$  setzen wir  $\pi := \text{id}_{\{1, \dots, m\}}$ .

Sei nun  $i \geq 1$ . Wir nehmen an, dass

$$(6.2) \quad V = L(w_1, \dots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(m)})$$

ist. Wir wollen nun eines der  $x_{\pi(j)}$  durch  $w_i$  ersetzen. Da  $w_i \in L(w_1, \dots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(m)})$ , gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , sodass

$$w_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j w_j + \sum_{j=i}^m \lambda_j x_{\pi(j)}.$$

Wenn nun für alle  $j \in \{i, i+1, \dots, m\}$  auch  $\lambda_j = 0$  gilt, so sind  $(w_1, \dots, w_i)$  linear abhängig. Daher gibt es ein  $j \in \{i, i+1, \dots, m\}$ , sodass  $\lambda_j \neq 0$ . Nach Lemma 6.43 gilt also

$$V = L(w_1, \dots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, w_i, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(m)}).$$

Wir definieren nun

$$\sigma : \{i, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

durch  $\sigma(j) := \pi(i)$ ,  $\sigma(i) := \pi(j)$ , und  $\sigma(r) = \pi(r)$  für  $r \in \{i, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} & L(w_1, \dots, w_i, x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \\ &= L(w_1, \dots, w_i, x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(m)}) \\ &= V. \end{aligned}$$

Somit leistet  $\sigma|_{\{i+1, \dots, m\}}$  das Gewünschte. ■

KOROLLAR 6.45. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und sei  $V$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , und seien  $x_1, \dots, x_m$  so, dass  $L(x_1, \dots, x_m) = V$ . Sei  $r \in \mathbb{N}$ , und sei  $(w_1, \dots, w_r)$  eine linear unabhängige Folge von Elementen aus  $V$ . Dann gilt  $r \leq m$ .

*Beweis:* Wir nehmen an  $r > m$ . Aus dem Austauschsatz (Satz 6.44) erhalten wir, dass  $L(w_1, \dots, w_m) = V$ . Also gilt  $w_{m+1} \in L(w_1, \dots, w_m)$ . Somit ist  $(w_1, \dots, w_{m+1})$  linear abhängig, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

**KOROLLAR 6.46.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt: Jede Folge von mehr als  $n$  Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  ist linear abhängig.

*Beweis.*  $\mathbb{R}^n$  hat die sogenannte *kanonische Basis*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Korollar 6.45 folgt, dass eine Folge aus mehr als  $n$  Vektoren linear abhängig ist. ■

**SATZ 6.47.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $T$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ . Dann haben alle Basen von  $T$  gleich viele Elemente.

**SATZ 6.48.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat  $T$  eine Basis.

*Beweis.* Sei  $C := \{(v_1, \dots, v_k) \in \bigcup_{k=0}^n T^k \mid (v_1, \dots, v_k) \text{ ist linear unabhängige}\}$ . Wir wählen nun  $m$  maximal, sodass  $C \cap T^m \neq \emptyset$ . Sei  $(v_1, \dots, v_m) \in C \cap T^m$ . Es gilt nun für alle  $w \in T$ , dass  $(v_1, \dots, v_m, w)$  linear abhängig ist: Falls  $m = n$ , gilt das, da  $n + 1$  Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  stets linear abhängig sind, sonst wegen der Maximalität von  $m$ . Also gilt  $L(v_1, \dots, v_m) = T$ . ■

Jeder Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist also die lineare Hülle endlich vieler Vektoren. Der Satz 6.47 ermöglicht folgende Definition:

**DEFINITION 6.49 (Dimension).** Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die *Dimension* von  $T$  die Anzahl der Elemente einer Basis von  $T$ . Wir kürzen die Dimension von  $T$  mit  $\dim(T)$  ab.

**SATZ 6.50.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ , sei  $k \in \mathbb{N}_0$ , sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  mit Dimension  $k$ , und sei  $S$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit  $S \subseteq T$  und  $\dim(S) = k$ . Dann gilt  $S = T$ .

*Beweis.* Sei  $(s_1, \dots, s_k)$  eine Basis von  $S$ . Falls  $L(s_1, \dots, s_k) = T$ , so gilt  $S = T$ . Wenn es ein  $t \in T \setminus L(s_1, \dots, s_k)$  gibt, so ist nach Satz 6.16 die Folge  $(s_1, \dots, s_k, t)$  linear unabhängig. Dann haben wir  $k + 1$  linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum mit einer  $k$ -elementigen Basis gefunden. Das widerspricht Korollar 6.45. ■

### ÜBUNGSAUFGABEN 6.51.

(1) Beweisen Sie:

Seien  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Sei

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_k)$$

eine linear unabhängige Folge von Vektoren aus  $M$ . Wir nehmen an, dass  $B$  so ist, dass es kein  $m \in M$  gibt, sodass  $(b_1, b_2, \dots, b_k, m)$  ebenfalls linear unabhängig ist. (Wir fordern also, dass  $B$  eine maximale linear unabhängige Folge aus  $M$  ist.) Dann ist  $B$  eine Basis für  $L(M)$ .

(2) Zeigen Sie:

Seien  $k, n \in \mathbb{N}$ , und sei  $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$  eine Folge von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es  $r \in \{0, \dots, k\}$  und  $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\}$ , sodass folgendes gilt:  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ , und  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_r})$  ist eine Basis von  $L(M)$ .

(3) Zeigen Sie:

Sei  $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ , und sei  $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$  eine Folge von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\dim(L(M)) \leq k$ .

## 8. Der Rang einer Matrix

DEFINITION 6.52. Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Der *Rang* von  $A$  ist die Dimension des Zeilenraums von  $A$ .

Man berechnet den Rang, indem man aus der Matrix  $A$  eine Matrix  $B$  in Zeilenstufenform erzeugt, die den gleichen Zeilenraum wie  $A$  hat. Die Zeilen von  $B$ , die nicht 0 sind, sind stets linear unabhängig. Sie bilden also eine Basis von  $Z(B) = Z(A)$ .

ALGORITHMUS 6.53 (Rang einer Matrix).

Eingabe: eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ .

Ausgabe: der Rang von  $A$ .

- 1 Berechne mit Algorithmus 6.21 eine Matrix  $B$  in Zeilenstufenform, sodass  $Z(B) = Z(A)$ .
- 2 **return** Anzahl der Zeilen von  $B$ , die nicht 0 sind.

SATZ 6.54. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, und sei  $k$  der Rang von  $A$ . Dann hat  $N(A)$  die Dimension  $n - k$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Matrix in Zeilenstufenform, sodass  $Z(B) = Z(A)$ . Wegen Korollar 6.36 hat  $B \cdot x = 0$  die gleiche Lösungsmenge wie  $A \cdot x = 0$ . Sei  $r$  die Anzahl der Zeilen von  $B$ , die nicht 0 sind. Diese Zeilen sind nach Satz 6.24 linear unabhängig, und bilden somit eine Basis von  $Z(B)$ . Da alle Basen eines Unterraums gleich viele Vektoren enthalten, gilt  $r = k$ . Nach Satz 6.37 hat  $N(B)$  die Dimension  $n - k$ . Da  $N(B) = N(A)$ , hat auch  $N(A)$  die Dimension  $n - k$ . ■

## 9. Die Eindeutigkeit der Zeilenstufenform

Die Zeilenstufenform hat folgende wichtige Eigenschaft:

SATZ 6.55. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und seien  $B, C$  zwei  $m \times n$ -Matrizen in Zeilenstufenform. Wir nehmen an, dass  $Z(B) = Z(C)$ . Dann gilt  $B = C$ .

*Beweis.* Wir fixieren  $m, n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen, dass für alle  $r \in \mathbb{N}_0$  folgendes gilt:

Für alle  $a \in \mathbb{N}$  und für alle  $a \times n$ -Matrizen  $B, C$  in Zeilenstufenform mit  $\dim(Z(B)) = r$  und  $Z(B) = Z(C)$  gilt  $B = C$ .

Diese Aussage beweisen wir durch Induktion nach  $r$ . Für  $r = 0$  gilt  $Z(B) = Z(C) = \{\vec{0}\}$ , also  $B = C = 0$ .

Sei nun  $r \geq 1$ , sei  $a \in \mathbb{N}$ , und seien  $B, C$  zwei  $a \times n$ -Matrizen in Zeilenstaffelnormalform mit  $Z(B) = Z(C)$  und  $\dim(Z(B)) = r$ . Dann haben sowohl  $B$  also auch  $C$  genau  $r$  Zeilen, die nicht 0 sind.

Für einen Unterraum  $U$  von  $\mathbb{R}^n$  und für  $l \in \{1, \dots, n-1\}$  definieren wir eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^l$  durch

$$U^{(l)} := \{(u_1, \dots, u_l) \in \mathbb{R}^l \mid \text{es gibt } u_{l+1}, \dots, u_n \in \mathbb{R}, \text{ sodass } (u_1, \dots, u_n) \in U\}.$$

$U^{(n)}$  definieren wir durch  $U^{(n)} := U$ . Außerdem definieren wir für jede  $m \times n$ -Matrix  $A$  und für jedes  $l \in \{1, \dots, n\}$

$$A_l := \text{die } m \times l\text{-Matrix, die aus den ersten } l \text{ Spalten von } A \text{ besteht.}$$

Dann gilt:

$$\text{Für alle } l \in \{1, \dots, n\} : Z(B_l) = Z(B)^{(l)}.$$

Seien  $j_1, \dots, j_r$  wie in der Definition der Zeilenstaffelnormalform. Dann gilt  $\dim(Z(B)^{(j_r)}) = r$ , da die ersten  $r$  Zeilen von  $B_{j_r}$  eine Basis von  $Z(B)^{(j_r)}$  sind. Ebenso gilt  $\dim(Z(B)^{(j_{r-1})}) = r-1$ , da die ersten  $r-1$  Zeilen von  $B_{j_{r-1}}$  eine Basis von  $Z(B)^{(j_{r-1})}$  sind. Daher gilt:  $j_r$  ist jenes  $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sodass  $\dim(Z(B)^{(l)}) = r$  und  $\dim(Z(B)^{(l-1)}) = r-1$ .

Die Matrix  $C$  hat ebenfalls genau  $r$  Zeilen, die nicht 0 sind. Seien  $j'_1, \dots, j'_r$  wie in der Definition der Zeilenstaffelnormalform. Wie oben gilt, dass  $j'_r$  jenes  $l' \in \{1, 2, \dots, n\}$  ist, sodass  $\dim(Z(C)^{(l')}) = r$  und  $\dim(Z(C)^{(l'-1)}) = r-1$ . Da  $Z(B) = Z(C)$ , gilt also  $j_r = j'_r$ .

Die ersten  $r-1$  Zeilen der Matrix  $B$  sind in Zeilenstaffelnormalform. Sie bilden eine Basis des Raums

$$U = \{(v_1, \dots, v_n) \in Z(B) \mid v_{j_r} = 0\}.$$

Ebenso sind die ersten  $r-1$  Zeilen der Matrix  $C$  in Zeilenstaffelnormalform. Sie sind eine Basis von

$$V = \{(v_1, \dots, v_n) \in Z(C) \mid v_{j'_r} = 0\}.$$

Sei  $B'$  die Matrix, die aus den ersten  $r-1$  Zeilen von  $B$  besteht, und sei  $C'$  die Matrix, die aus den ersten  $r-1$  Zeilen von  $C$  besteht. Nach Voraussetzung gilt  $Z(B) = Z(C)$ . Daher gilt auch  $U = V$ . Das heißt aber, dass  $Z(B') = Z(C')$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt also  $B' = C'$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $B$  und  $C$  die gleiche  $r$ -te Zeile haben. Sei  $b$  die  $r$ -te Zeile von  $B$  und  $c$  die  $r$ -te Zeile von  $C$ . Der Eintrag an der  $j_r$ -ten Stelle von  $b - c$  ist  $1 - 1 = 0$ ; auch alle Einträge von  $b - c$  vor der  $j_r$ -ten Stelle sind gleich 0. Da  $b, c \in Z(B)$ , gilt  $b - c \in Z(B)$ . Seien  $b_1, \dots, b_r$  die ersten  $r$  Zeilen von  $B$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  so, dass  $\sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot b_k = b - c$ . Wenn wir für  $i \in \{1, \dots, r\}$  den  $j_i$ -ten Eintrag betrachten, erhalten

wir

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot B(k, j_i) = 0.$$

Da  $B$  in Zeilenstufenform ist, ist nur der  $i$ -te Summand dieser Summe ungleich 0. Wir erhalten also  $\lambda_i = 0$ . Folglich sind alle  $\lambda_i = 0$ , also  $b = c$ . Also sind auch die  $r$ -te Zeile von  $B$  und  $C$  gleich. ■

Dieser Satz hat folgende Anwendung:

ALGORITHMUS 6.56 (Gleichheit von Unterräumen).

Eingabe:  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  und  $w_1, \dots, w_l \in \mathbb{R}^n$ .

Ausgabe: **true**, falls  $L(v_1, \dots, v_k) = L(w_1, \dots, w_l)$ , **false** sonst.

- 1  $m \leftarrow \max(k, l)$
- 2  $\tilde{V} \leftarrow$  die  $m \times n$ -Matrix, deren erste  $k$  Zeilen die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  sind, und deren restliche Zeilen 0 sind
- 3  $\tilde{W} \leftarrow$  die  $m \times n$ -Matrix, deren erste  $l$  Zeilen die Vektoren  $w_1, \dots, w_l$  sind, und deren restliche Zeilen 0 sind
- 4 Berechne eine Matrix  $\tilde{V}'$  in Zeilenstufenform, sodass  $Z(\tilde{V}') = Z(\tilde{V})$
- 5 Berechne eine Matrix  $\tilde{W}'$  in Zeilenstufenform, sodass  $Z(\tilde{W}') = Z(\tilde{W})$
- 6 **return true**, falls  $\tilde{V}' = \tilde{W}'$ , und **false** sonst.

## 10. Die Lösungsmenge inhomogener linearer Gleichungssysteme

DEFINITION 6.57. Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , und sei  $b \in \mathbb{R}^m$ . Das Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  heißt *homogen*, wenn  $b = 0$ , und *inhomogen*, wenn  $b \neq 0$ .

DEFINITION 6.58. Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist die *lineare Mannigfaltigkeit*  $x_0 + T$  definiert durch:

$$x_0 + T := \{x_0 + t \mid t \in T\}.$$

Die lineare Mannigfaltigkeit  $x_0 + T$  ist also der um den Vektor  $x_0$  verschobene Unterraum  $T$ . Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme sind stets leer oder lineare Mannigfaltigkeiten.

SATZ 6.59. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, und sei  $x_0$  eine Lösung des Systems  $A \cdot x = b$ . Sei  $L$  die Lösungsmenge von  $A \cdot x = b$  und  $N(A)$  der Nullraum von  $A$ . Dann gilt:  $L = x_0 + N(A)$ .

AUFGABE 6.60. Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Berechne die Lösungsmenge von  $A \cdot x = b$ .

Wir lösen dieses Beispiel mit Mathematica. Mathematica bietet dazu die Funktionen `NullSpace` und `LinearSolve`.

In[78] :=  $\mathbf{A} = \{\{3, 1, 2, -5\}, \{0, 1, -3, 8\}\};$

In[79] :=  $\mathbf{b} = \{4, 1\};$

In[80] := **NullSpace** [A]

Out[80] =  $\{\{13, -24, 0, 3\}, \{-5, 9, 3, 0\}\}$

In[81] := **LinearSolve** [A, b]

Out[81] =  $\{1, 1, 0, 0\}$

Die Lösungsmenge ist damit gegeben durch

$$L = \{(1, 1, 0, 0) + s \cdot (13, -24, 0, 3) + t \cdot (-5, 9, 3, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir überlegen uns jetzt noch, wie wir algorithmisch bestimmen können, ob ein lineares Gleichungssystem eine Lösung hat. Sei dazu  $A \cdot x = b$  ein lineares Gleichungssystem. Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A \ b)$ , also jene Matrix, die wir erhalten, wenn wir  $A$  um eine Spalte vergrößern und in diese Spalte  $b$  schreiben.

**SATZ 6.61.** Seien  $A \cdot x = b$  und  $C \cdot x = d$  zwei lineare Gleichungssysteme, und sei  $E = (A \ b)$  und  $F = (C \ d)$ . Wenn  $E$  und  $F$  den gleichen Zeilenraum haben, dann haben die beiden Gleichungssysteme die gleiche Lösungsmenge.

**SATZ 6.62.** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, sei  $b \in \mathbb{R}^m$ , sei  $E$  die Matrix  $(A \ b)$ , und sei  $L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$ . Dann gilt

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} \in N(E) \right\}.$$

**SATZ 6.63.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , und sei  $E := (A \ b)$ . Sei  $F$  eine Matrix in Zeilenstaffelform mit  $Z(F) = Z(E)$ , und seien  $j_1 < \dots < j_r$  wie in Definition 3.1. Wenn  $j_r = n + 1$ , dann hat das System  $A \cdot x = b$  keine Lösung.

*Beweis.* Wenn  $j_r = n + 1$ , dann gilt für alle Elemente  $x \in N(F)$ , dass  $x_{n+1} = 0$  ist. Nach Satz 6.62 hat  $A \cdot x = b$  also keine Lösung. ■

Wir bestimmen jetzt alle Lösungen von  $A \cdot x = b$  folgendermaßen:

**ALGORITHMUS 6.64** (Lineare Gleichungssysteme).

Eingabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ , und  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Ausgabe: "keine Lösung", falls es kein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $A \cdot x = b$  gibt. Sonst geben wir einen Vektor  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und eine  $t \times n$ -Matrix  $D$  aus, sodass die Lösungsmenge von  $A \cdot x = b$  gleich  $x_0 + Z(D)$  ist.

- 1  $B \leftarrow$  die erweiterte Matrix  $(A \ b)$
- 2  $C \leftarrow$  die  $m \times (n + 1)$ -Matrix in Zeilenstaffelnormalform mit  $Z(C) = Z(B)$
- 3  $r \leftarrow$  Anzahl der Zeilen  $\neq 0$  von  $B$ .
- 4 **for**  $s = 1$  **to**  $r$
- 5     **do**  $J[s] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid C[s, k] \neq 0\}$

```

6  if  $J[r] = n + 1$ 
7    then resultat  $\leftarrow$  "keine Lösung"
8    else  $D \leftarrow$  die  $(n - r) \times n$ -Matrix mit allen Einträgen 0
9           $x_0 \leftarrow$  der Nullvektor im  $\mathbb{R}^n$ 
10          $I \leftarrow$  aufsteigend geordnete Liste der Elemente von  $\{1, \dots, n\} \setminus \{J[s] \mid s \in$ 
         $\{1, \dots, r\}\}$ 
11         for  $k = 1$  to  $n - r$ 
12           do  $i \leftarrow I[k]$ 
13             (* die  $i$ -te Variable wird frei gewählt *)
14              $D[k, i] \leftarrow 1$ 
15             for  $s = 1$  to  $r$ 
16               do  $D[k, J[s]] \leftarrow -C[s, i]$ 
17             for  $s = 1$  to  $r$ 
18               do  $x_0[J[s]] \leftarrow C[s, n + 1]$ 
19             resultat  $\leftarrow (x_0, C)$ 
20 return resultat

```

Wir berechnen jetzt die Lösung von zwei linearen Gleichungssystemen mit Mathematica, indem wir die Zeilenstaffelnormalform von  $(A \ b)$  ausrechnen.

AUFGABE 6.65. `In[82] := << RowRed9.m`

`In[83] := MatrixForm[A1]`

$$\text{Out}[83] = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

`In[84] := MatrixForm[b1]`

$$\text{Out}[84] = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

`In[85] :=`

`LinSolveViaREF[A1, b1]`

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 4 & -2 & -9 \\ 0 & 17 & -34 & -10 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 & -58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 & -58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out}[85] = \left\{ \{-2, 1, 0, -1, 0\}, \{2, 2, 1, 0, 0\}, \left\{1, 0, 0, \frac{1}{2}, 1\right\} \right\}$$

Jetzt noch ein System, das keine Lösung hat.

AUFGABE 6.66. `In[86] := << RowRed9.m`

`In[87] := MatrixForm[A2]`

$$\text{Out}[87] = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

`In[88] := MatrixForm[b2]`

$$\text{Out}[88] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

`In[89] :=`

`LinSolveViaREF[A2, b2]`

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 10 & 14 & 18 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -20 & -27 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & -27 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{27}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{18}{27} & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{13}{13} & \frac{13}{13} & -\frac{13}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{18}{27} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{13} & \frac{13}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out [89] = NOSOLUTION

### ÜBUNGSAUFGABEN 6.67.

- (1) Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

Wenn das Gleichungssystem  $A \cdot x = 0$  eine Lösung hat, so besitzt für jede rechte Seite  $b$  das Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  zumindest eine Lösung.

## 11. Koordinaten

**SATZ 6.68.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , sei  $B = (b_1, \dots, b_m)$  eine Basis des Unterraums  $T$  von  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $t \in T$ . Dann gibt es genau ein  $m$ -Tupel  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  mit

$$t = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot b_i.$$

*Beweis.* Ein solches  $m$ -Tupel existiert, da  $t \in L(b_1, \dots, b_m)$ . Sei nun  $\bar{B}$  die  $n \times m$ -Matrix, in deren Spalten die Vektoren  $(b_1, \dots, b_m)$  stehen. Angenommen,  $\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  und  $\beta = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  seien zwei verschiedene Tupel mit  $\bar{B} \cdot \alpha = \bar{B} \cdot \beta = t$ . Dann gilt  $\bar{B} \cdot (\alpha - \beta) = 0$  und  $\alpha - \beta \neq 0$ . Das ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von der Spalten von  $\bar{B}$ . ■

Dieses  $m$ -Tupel gibt also an, wie wir den Vektor  $t$  aus den Basisvektoren zusammensetzen können. Wir nennen dieses Tupel die *Koordinaten* des Vektors  $t$  bezüglich der Basis  $B$ .

**DEFINITION 6.69.** Sei  $B = (b_1, \dots, b_m)$  Basis von  $T \subseteq \mathbb{R}^n$ , sei  $t \in T$ , und sei  $\bar{B}$  die  $n \times m$ -Matrix, in deren Spalten die Vektoren  $(b_1, \dots, b_m)$  stehen. Dann heißt das  $\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  mit

$$\bar{B} \cdot \alpha = t$$

das *Koordinatentupel* von  $t$  bezüglich der Basis  $B$ . Wir schreiben auch  $(t)_B = \alpha$ .

Das Koordinatentupel  $(t)_B$  erfüllt also die Gleichung

$$\bar{B} \cdot (t)_B = t.$$

AUFGABEN 6.70. (1) Sei  $B = ((1, 0, 3), (2, 1, 6))$ ,  $T = L(B)$ , und  $v = (3, 1, 9)$ .  
Offenbar gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

woraus  $(v)_B = (1, 1)$  folgt.

(2) Sei  $T = L((3, 2, 1), (0, 1, 2))$ . Für das erste Basiselement gilt offensichtlich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

weilers ist zum Beispiel

$$\left( 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

### ÜBUNGSAUFGABEN 6.71.

- (1) Der Vektor  $v$  hat bezüglich der Basis  $A = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$  der Ebene  $\varepsilon$  die Koordinaten  $(v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich der Basis  $B = \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ -26 \end{pmatrix} \right)$ .

- (2) Die Ebene  $\varepsilon$  hat die Basen

$$A = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Der Vektor  $v$  hat bezüglich  $B$  die Koordinaten  $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich  $A$ !

- (3) Die Ebene  $e$  ist durch  $e = L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$  gegeben. Sie hat die Basen

$$B = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$C = \left( \begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix} \right).$$

Der Vektor  $v$  ist gegeben durch  $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie  $(v)_B$ .

- (4) Sei  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , und sei  $B = (a, b)$ . Zeigen Sie, dass ein Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  bezüglich der Basis  $B$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b \rangle \end{pmatrix}$  hat; das heißt, zeigen Sie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b \rangle \end{pmatrix}.$$

Stimmt diese Formel für jede Basis  $(a, b)$  des  $\mathbb{R}^2$ ?

- (5) Sei  $B = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ , und sei  $E$  die lineare Hülle von  $B$ .  $B$  ist dann eine Basis von  $E$ .

(a) Welcher Vektor  $w$  hat bezüglich  $B$  die Koordinaten  $(w)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ?

(b) Wie lauten die Koordinaten von  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  bezüglich  $B$ ?

(c) Geben Sie eine Basis  $C$  von  $E$  an, bezüglich der der Punkt  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  hat.

## 12. Summen und Durchschnitte von Unterräumen

**SATZ 6.72.** Seien  $U, V$  Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $U \cap V$  auch ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINITION 6.73.** Seien  $U, V$  Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\}.$$

**SATZ 6.74.** Seien  $U, V$  Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $U + V$  auch ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .

Wir überlegen uns nun, wie wir Basen von  $U \cap V$  und  $U + V$  berechnen können.

**ALGORITHMUS 6.75** (Summe explizit gegebener Unterräume).

Eingabe:  $u_1, \dots, u_l \in \mathbb{R}^n$  und  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $L(u_1, \dots, u_l) = U$  und  $L(v_1, \dots, v_m) = V$ .

Ausgabe: Eine Basis von  $U + V$ .

- 1 Bilde eine  $(l + m) \times n$ -Matrix  $W$ , deren erste  $l$  Zeilen die Vektoren  $u_1, \dots, u_l$  sind, und deren  $(l + 1)$ -te bis  $(l + m)$ -te Zeile die Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  sind
- 2 Bestimme eine Matrix  $W'$  in Zeilenstaffelform, sodass  $Z(W') = Z(W)$
- 3 **return** die Zeilen von  $W'$ , die nicht 0 sind

**ALGORITHMUS 6.76** (Durchschnitt implizit gegebener Unterräume).

Eingabe: Eine  $r \times n$ -Matrix  $A$  und eine  $s \times n$ -Matrix  $B$ , sodass  $N(A) = U$  und  $N(B) = V$ .

Ausgabe: Eine Basis von  $U \cap V$ .

- 1 Bilde die  $(r + s) \times n$ -Matrix  $C$ , deren erste  $r$  Zeilen die Matrix  $A$  und deren letzte  $s$  Zeilen die Matrix  $B$  sind
- 2 Bestimme eine Basis  $X$  für  $N(C)$
- 3 **return**  $X$

Um die Summe zweier implizit gegebener Unterräume zu berechnen, können wir uns zuerst von beiden Unterräumen mit den Algorithmen 6.27 und 6.39 eine Basis ausrechnen, und dann Algorithmus 6.75 verwenden.

**AUFGABE 6.77.** Bestimmen Sie eine Basis des Raums  $U + V$ , wobei

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

und

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

*Lösung:* Wir berechnen Matrizen  $C, D$ , in deren Zeilen Basen von  $U$  bzw.  $V$  stehen.

$In[90] := \mathbf{A} = \{\{4, -3, 0, 1\}, \{2, -2, 1, 0\}\}$

$Out[90] = \{\{4, -3, 0, 1\}, \{2, -2, 1, 0\}\}$

In[91] := **B** = {{2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}

Out[91] = {{2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}

In[92] := **CC** = **NullSpace** [**A**]

Out[92] = {{-1, -1, 0, 1}, {3, 4, 2, 0}}

In[93] := **DD** = **NullSpace** [**B**]

Out[93] = {{-2, 3, 0, 13}, {3, 2, 13, 0}}

Jetzt bestimmen wir eine Matrix  $E$ , deren Zeilenraum der Raum  $U + V$  ist.

In[94] := **EE** = **Join** [**CC**, **DD**];

In[95] := **MatrixForm** [**EE**]

Out[95] = 
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 13 \\ 3 & 2 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

In[96] := **FF** = **RowReduce** [**EE**];

In[97] := **MatrixForm** [**FF**]

Out[97] = 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$((1, 0, 0, -16/5), (0, 1, 0, 11/5), (0, 0, 1, 2/5))$$

eine Basis von  $U + V$ .

Nun wollen wir den Durchschnitt zweier parametrisiert gegebener Unterräume berechnen.

**SATZ 6.78.** Sei  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\dim(U^\wedge) = n - \dim(U)$ .

*Beweis.* Sei  $(u_1, \dots, u_l)$  eine Basis von  $U$ .  $U^\wedge$  ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems  $\tilde{U} \cdot x = 0$ , wobei  $\tilde{U}$  die  $l \times n$ -Matrix ist, deren Zeilenvektoren  $u_1, \dots, u_l$  sind. Der Rang von  $U$  ist  $l$ , daher ist die Dimension von  $U^\wedge$  nach Satz 6.54 gleich  $n - l$ . ■

**SATZ 6.79.** Sei  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $(U^\wedge)^\wedge = U$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $\supseteq$ . Sei  $u \in U$ . Um zu zeigen, dass  $u \in (U^\wedge)^\wedge$  liegt, ist zu zeigen, dass  $\langle v, u \rangle = 0$  für alle  $v \in U^\wedge$ . Sei  $v \in U^\wedge$ . Da  $v \in U^\wedge$ , gilt  $\langle u, v \rangle = 0$ . Also gilt  $U \subseteq (U^\wedge)^\wedge$ . Sei  $l$  die Dimension von  $U$ . Es gilt  $\dim((U^\wedge)^\wedge) = n - \dim(U^\wedge) = n - (n - l) = l$ . Wegen Satz 6.50 gilt also  $U = (U^\wedge)^\wedge$ . ■

**SATZ 6.80.** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, und sei  $B$  eine  $n \times l$ -Matrix, in deren Spalten eine Basis für den Nullraum von  $A$  steht. Dann gilt

$$N(B^T) = Z(A).$$

Der Nullraum von  $B^T$  ist also der Zeilenraum von  $A$ .

*Beweis.* In den Spalten von  $B$  steht eine Basis für den Nullraum  $N(A)$  von  $A$ . Der Nullraum  $N(A)$  ist gleichzeitig der Raum  $(Z(A))^\wedge$ . In den Spalten von  $B$  steht also eine Basis für  $(Z(A))^\wedge$ . Nach Satz 6.35 gilt  $N(B^T) = (Z(B^T))^\wedge$ . Da in den Spalten von  $B$  eine Basis von  $(Z(A))^\wedge$  steht, sind auch die Zeilen von  $B^T$  eine Basis von  $(Z(A))^\wedge$ . Es gilt also  $Z(B^T) = (Z(A))^\wedge$ . Somit gilt insgesamt  $N(B^T) = (Z(B^T))^\wedge = ((Z(A))^\wedge)^\wedge$ . Wegen Satz 6.79 gilt also  $N(B^T) = Z(A)$ . ■

Dieser Satz lässt sich noch umformulieren:

**KOROLLAR 6.81.** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, und sei  $C$  eine  $l \times n$ -Matrix, in deren Zeilen eine Basis für den Nullraum von  $A$  steht. Dann gilt

$$N(C) = Z(A).$$

Der Nullraum von  $C$  ist also der Zeilenraum von  $A$ .

Das führt zu folgendem Algorithmus:

**ALGORITHMUS 6.82** (Implizitisieren eines Unterraums).

Eingabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ .

Ausgabe: Eine  $l \times n$ -Matrix  $C$ , sodass  $N(C) = Z(A)$ .

- 1  $C \leftarrow$  eine Matrix, in deren Zeilen eine Basis von  $N(A)$  steht
- 2 **return**  $C$

**ALGORITHMUS 6.83** (Durchschnitt von explizit gegebenen Unterräumen).

Eingabe:  $u_1, \dots, u_l \in \mathbb{R}^n$  und  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $L(u_1, \dots, u_l) = U$  und  $L(v_1, \dots, v_m) = V$ .

Ausgabe: Eine Basis von  $U \cap V$ .

- 1 Bestimme mit Algorithmus 6.82 eine Matrix  $C_1$ , sodass  $N(C_1) = U$
- 2 Bestimme mit Algorithmus 6.82 eine Matrix  $C_2$ , sodass  $N(C_2) = V$
- 3 Verwende Algorithmus 6.76, um eine Basis von  $N(C_1) \cap N(C_2)$  auszurechnen

Wir verwenden diesen Algorithmus, um folgendes Beispiel zu lösen.

**AUFGABE 6.84.** Sei  $U = L((-1, -2, -2, -2), (1, 4, 6, 8))$ , und  $V = L((1, 0, 3, -2), (-1, 2, 1, 8))$ . Berechnen Sie eine Basis von  $U \cap V$ .

*Lösung:*

```
In[98] := CfuereU1 = NullSpace [{{-1, -2, -2, -2}, {1, 4, 6, 8}}]
```

`Out [98] = {{4, -3, 0, 1}, {2, -2, 1, 0}}`

`In [99] := CfuerU2 = NullSpace [{{1, 0, 3, -2}, {-1, 2, 1, 8}}]`

`Out [99] = {{2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}`

`In [100] := CfuerU1geschnittenU2 = Join [CfuerU1, CfuerU2]`

`Out [100] = {{4, -3, 0, 1}, {2, -2, 1, 0}, {2, -3, 0, 1}, {-3, -2, 1, 0}}`

`In [101] := BasisFuerU1geschnittenU2 = NullSpace [CfuerU1geschnittenU2]`

`Out [101] = {{0, 1, 2, 3}}`

Somit ist  $((0, 1, 2, 3))$  eine Basis von  $U \cap V$ .

Zum Schneiden parametrisiert gegebener linearer Mannigfaltigkeiten hilft folgender Algorithmus.

ALGORITHMUS 6.85 (Implizitisieren einer linearen Mannigfaltigkeit).

Eingabe: Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ , und  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Ausgabe: Eine  $l \times n$ -Matrix  $C$  und  $d \in \mathbb{R}^l$ , sodass  $b + Z(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C \cdot x = d\}$ .

- 1  $C \leftarrow$  eine Matrix, in deren Zeilen eine Basis von  $N(A)$  steht
- 2  $d \leftarrow C \cdot b$
- 3 **return**  $(C, d)$



## KAPITEL 7

# Orthogonalität

### 1. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

DEFINITION 7.1. Für  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  ist das *Skalarprodukt* von  $x$  und  $y$  definiert als

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Es gilt

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2.$$

LEMMA 7.2. Für  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
- (2)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

SATZ 7.3. Der Winkel  $\varphi$  zwischen  $x$  und  $y$  ist gegeben durch

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

DEFINITION 7.4. Zwei Vektoren *stehen genau dann normal aufeinander*, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ . Wir schreiben dann  $x \perp y$ .

ÜBUNGSAUFGABEN 7.5.

- (1) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  normal steht.
- (2) Sei  $B = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ , und sei  $E$  die lineare Hülle von  $B$ .  $B$  ist dann eine Basis von  $E$ . Außerdem bezeichnen wir mit  $\bar{B}$  die Matrix

$$\bar{B} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welches Gleichungssystem muss ein Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  erfüllen, der auf alle Vektoren in  $E$  normal steht? Was hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems mit  $\bar{B}$  zu tun?
- (b) Mit welchem Gleichungssystem können Sie feststellen, ob ein Vektor  $v$  in  $E$  liegt? Was hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems mit  $\bar{B}$  zu tun?
- (c) Sei  $w = \begin{pmatrix} 16 \\ 44 \\ -6 \end{pmatrix}$ . Finden Sie einen Vektor  $e$ , der in  $E$  liegt, sodass  $w - e$  normal auf alle Vektoren in  $E$  steht.

## 2. Der Normalraum auf eine Menge von Vektoren

Wenn  $U$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist, dann bezeichnen wir den Raum  $U^\perp$  auch als “ $U$  orthogonal” und verwenden anstelle von  $U^\perp$  die Bezeichnung  $U^\perp$ . Für eine Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^n$  ist  $A^\perp$  also definiert durch

$$A^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp a \text{ für alle } a \in A\}.$$

Für jede Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  gilt  $A^\perp = L(A)^\perp$  und  $(A^\perp)^\perp = L(A)$ .

### ÜBUNGSAUFGABEN 7.6.

- (1) Gegeben seien die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a)  $\{x\}^\perp$ ,  
 (b)  $\{x, y\}^\perp$ ,  
 (c)  $\{x, y, z\}^\perp$ ,

und jeweils die Dimension davon.

- (2) Welche Vektoren des  $\mathbb{R}^4$  stehen auf alle drei Vektoren

$$(1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, -1), (1, 0, 2, 0)$$

normal? (Zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^4$  stehen aufeinander normal, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist.)

## 3. Orthonormalbasen

DEFINITION 7.7. Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $B = (b_1, \dots, b_k)$  eine Basis von  $T$ .  $B$  ist eine *Orthonormalbasis* (ONB), wenn

- (1)  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$  für alle  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  mit  $i \neq j$ .  
 (2)  $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

### BEISPIELE 7.8.

- (1) Die kanonische Basis  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  ist ONB des  $\mathbb{R}^3$ .  
 (2)  $B = ((\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, 0, 1))$  ist ONB des  $\mathbb{R}^3$ .  
 (3)  $B = (\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1))$  ist ONB von  $L((1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1))$ .  
 (4) Sei  $b_1 = (3, 4), b_2 = (-4, 3)$ . Dann ist  $(\frac{b_1}{5}, \frac{b_2}{5})$  ONB des  $\mathbb{R}^2$ .

### ÜBUNGSAUFGABEN 7.9.

- (1) (Orthonormalbasen) Welche der folgenden Basen sind ONB?

- (a)  $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix})$ .  
 (b)  $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ .  
 (c)  $(\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix})$ .

SATZ 7.10. Sei  $B = (b_1, \dots, b_k)$  eine ONB und  $v \in L(B)$  mit den Koordinaten  $(v)_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Dann gilt

$$\|v\|^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2.$$

*Beweis.* Da  $B$  eine ONB ist, gilt

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \langle v, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \cdot 1.\end{aligned}$$

■

Wir wenden diesen Satz an:

Sei  $b_1 = (0.6, 0.8)$ ,  $b_2 = (-0.8, 0.6)$ . Berechnen Sie die Länge von  $v = 12 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2$ !

Lösung: Da  $(b_1, b_2)$  eine ONB des  $\mathbb{R}^2$  ist, gilt

$$\|v\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

Wir kontrollieren das Ergebnis, indem wir  $v$  berechnen. Da

$$v = 12 \cdot (0.6, 0.8) + 5 \cdot (-0.8, 0.6) = (3.2, 12.6),$$

gilt

$$\|v\| = \sqrt{(3.2)^2 + (12.6)^2} = 13.$$

**SATZ 7.11.** Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  mit der ONB  $B = (b_1, \dots, b_k)$ . Sei  $v \in L(B)$  mit den Koordinaten  $(v)_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Dann gilt

$$\lambda_i = \langle v, b_i \rangle \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\}.$$

*Beweis.* Sei  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Wir wissen, dass

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j b_j = v,$$

und somit

$$\left\langle \sum_{j=1}^k \lambda_j b_j, b_i \right\rangle = \langle v, b_i \rangle.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle b_j, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle$$

oder

$$\lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle.$$

Somit gilt

$$\lambda_i = \langle v, b_i \rangle.$$

■

Bei Orthonormalbasen müssen wir also kein Gleichungssystem lösen, um die Koordinaten eines Vektors zu bestimmen. Dazu folgendes Beispiel: Gegeben sei die ONB  $B = ((0.6, 0.8), (-0.8, 0.6))$ . Gesucht sind die Koordinaten  $(\lambda_1, \lambda_2)$  von  $v = (2, 1)$  bzgl.  $B$ .

$$\lambda_1 = \langle v, b_1 \rangle = 2, \quad \lambda_2 = \langle v, b_2 \rangle = -1.$$

Also gilt:

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis besitzt also zwei wesentliche Vorteile gegenüber normalen Basen:

- (1) Mit  $(v)_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  kann die Länge des Vektors  $v$  als

$$\|v\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2}$$

berechnet werden.

- (2) Die Koordinaten eines Vektors  $v$  erhält man als

$$(v)_B = \begin{pmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{pmatrix}.$$

#### 4. Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben ist ein Unterraum  $T$  mit der Basis  $B = (b_1, \dots, b_m)$ . Gesucht ist eine ONB  $(d_1, \dots, d_m)$  von  $T$ .

Wir konstruieren  $d_1, \dots, d_m$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $d_i \perp d_j$  für  $i \neq j$ ,
- (2)  $\|d_i\| = 1$  für alle  $i$ ,
- (3) für alle  $k \leq m$  gilt  $L(b_1, \dots, b_k) = L(d_1, \dots, d_k)$ .

(1) und (2) sollen garantieren, dass wir eine ONB erhalten. (3) fordert, dass die ersten  $k$  Vektoren der gesuchten ONB den gleichen Vektorraum aufspannen wie die ersten  $k$  Vektoren der Basis  $B$ .

ALGORITHMUS 7.12.

- (1) *Konstruktion von  $d_1$* : Wir setzen  $c_1 = b_1$  und  $d_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|}$ .
- (2) *Konstruktion von  $d_2$* : Um (3) erfüllen zu können, machen wir den Ansatz

$$c_2 = b_2 + \alpha_1 \cdot d_1$$

mit  $\langle c_2, d_1 \rangle = 0$ . Aus

$$\langle b_2 + \alpha_1 \cdot d_1, d_1 \rangle = \langle b_2, d_1 \rangle + \alpha_1 \langle d_1, d_1 \rangle = \langle b_2, d_1 \rangle + \alpha_1 = 0$$

folgt

$$\alpha_1 = -\langle b_2, d_1 \rangle.$$

Also erhalten wir mittels

$$c_2 = b_2 - \langle b_2, d_1 \rangle \cdot d_1,$$

$$d_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|}$$

den gewünschten Vektor  $d_2$ .

(3) *Konstruktion von  $d_3$* : Für  $c_3$  machen wir analog zu  $c_2$  den Ansatz

$$c_3 = b_3 + \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2.$$

Fordern wir dann Normalität zu den ersten beiden Vektoren, so erhalten wir

$$\langle c_3, d_1 \rangle = \langle b_3, d_1 \rangle + \alpha_1 \underbrace{\langle d_1, d_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle d_2, d_1 \rangle}_{=0} = 0,$$

also

$$\alpha_1 = -\langle b_3, d_1 \rangle,$$

und

$$\langle c_3, d_2 \rangle = \langle b_3, d_2 \rangle + \alpha_1 \underbrace{\langle d_1, d_2 \rangle}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\langle d_2, d_2 \rangle}_{=1} = 0,$$

also

$$\alpha_2 = -\langle b_3, d_2 \rangle.$$

Somit ergibt sich  $c_3$  als

$$c_3 = b_3 - \langle b_3, d_1 \rangle \cdot d_1 - \langle b_3, d_2 \rangle \cdot d_2$$

und der gesuchte Vektor  $d_3$  der Länge 1 als

$$d_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}.$$

(4) *Konstruktion von  $d_i$* : Seien  $d_1, \dots, d_{i-1}$  bereits bekannt. Dann setzen wir

$$c_i = b_i - \langle b_i, d_1 \rangle \cdot d_1 - \dots - \langle b_i, d_{i-1} \rangle \cdot d_{i-1}$$

und erhalten mit

$$d_i = \frac{c_i}{\|c_i\|}$$

den gewünschten Vektor.

AUFGABEN 7.13. (1) Sei

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Gesucht ist eine ONB von  $L(B)$ .

Offenbar ist  $c_1 = (1, -1, 1, -1)$  und somit

$$d_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \langle (-1, 1, 3, -3), d_1 \rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$d_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle (1, 0, 0, 0), d_1 \rangle d_1 - \langle (1, 0, 0, 0), d_2 \rangle d_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$d_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sei  $B = ((3, 4), (5, 6))$ . Gesucht ist eine ONB von  $L(B)$ .

Wir erhalten

$$d_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass die beiden Vektoren tatsächlich normal aufeinander stehen.

**SATZ 7.14.** Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat  $T$  eine ONB.

*Beweis.* Aus einer beliebigen Basis von  $T$  kann mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine ONB berechnet werden. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 7.15.

- (1) Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt!

$$A = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (2) Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis (ONB) für folgende Unterräume des
- $\mathbb{R}^3$
- !

$$(a) U = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

$$(b) V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \text{ und } x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}. \text{ (Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Basis von } V \text{ und orthonormalisieren Sie diese mit dem Verfahren von Gram-Schmidt).}$$

- (3) Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene
- $e : x - 2y + 3z = 0$
- an.

- (4) Bestimmen Sie mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

## 5. Orthogonalprojektionen

**SATZ 7.16.** Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

- (1)  $x \in T$ ,
- (2)  $v - x \in T^\perp$ .

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma.

**LEMMA 7.17.** Seien  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig.  $B$  sei definiert als die  $n \times k$ -Matrix mit den Spalten  $b_1, \dots, b_k$ . Dann ist  $B^T \cdot B$  invertierbar.

Man kann zeigen, dass die Spaltenvektoren von  $B^T \cdot B$  linear unabhängig sind. Später werden wir sehen, dass jede quadratische Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren invertierbar ist.

*Beweis von Satz 7.16.*

- Zunächst zeigen wir, dass so ein  $x$  existiert. Sei  $(b_1, \dots, b_k)$  eine Basis von  $T$ , und sei  $B$  die  $n \times k$ -Matrix, in deren Spalten die Vektoren  $b_1, \dots, b_k$  stehen. Wir versuchen  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  zu finden, sodass

$$x := \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot b_i = B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}}_{\alpha}$$

die Eigenschaft  $v - B \cdot \alpha \in T^\perp$  erfüllt. Dann muss gelten:  $\langle b_j, v - x \rangle = \langle b_j, v - B \cdot \alpha \rangle = 0$  für alle  $j$ , oder, anders ausgedrückt,

$$\begin{pmatrix} \langle b_1, v - B \cdot \alpha \rangle \\ \langle b_2, v - B \cdot \alpha \rangle \\ \vdots \\ \langle b_k, v - B \cdot \alpha \rangle \end{pmatrix} = B^T \cdot (v - B \cdot \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

und somit

$$B^T \cdot v - B^T \cdot B \cdot \alpha = 0,$$

also

$$B^T \cdot v = (B^T \cdot B) \cdot \alpha.$$

Da die Basisvektoren linear unabhängig sind, ist nach Lemma 7.17 die Matrix  $B^T \cdot B$  invertierbar. Somit muss  $\alpha$  die Gleichung

$$(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = (B^T \cdot B)^{-1} (B^T \cdot B) \cdot \alpha = \alpha$$

erfüllen. Wir erhalten als Kandidaten für  $x$  also

$$x = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v.$$

Wir überprüfen jetzt, ob  $v - x$  wirklich in  $T^\perp$  liegt, und erhalten

$$\begin{aligned} B^T(v - x) &= B^T(v - B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v) \\ &= B^T \cdot v - B^T \cdot B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v \\ &= B^T v - B^T v = 0. \end{aligned}$$

- Eindeutigkeit: Seien  $x, y$  zwei Vektoren, die den Bedingungen des Satzes 7.16 genügen, d.h.

- (1)  $x, y \in T$ ,

- (2)  $v - x, v - y \in T^\perp$ .

Wegen (1) gilt  $x - y \in T$ . Aus (2) erhalten wir  $(v - x) - (v - y) = -x + y \in T^\perp$ . Daher gilt auch  $-(-x + y) = x - y \in T^\perp$ . Da  $x - y \in T$  und  $x - y \in T^\perp$ , gilt  $\langle x - y, x - y \rangle = 0$ . Also gilt  $\|(x - y)\|^2 = 0$ , und folglich  $x = y$ .

Somit existiert genau ein  $x$ , das die obigen Eigenschaften erfüllt. ■

DEFINITION 7.18. Sei  $n \in \mathbb{N}$ , sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $v \in \mathbb{R}^n$ . Das  $x \in T$  mit  $v - x \in T^\perp$  nennen wir *orthogonale Projektion* von  $v$  auf  $T$  und schreiben  $x = P_T(v)$ .

Wenn  $T$  der Spaltenraum der Matrix  $B$  mit linear unabhängigen Spalten  $(b_1, \dots, b_k)$  ist, also  $T = S(B)$ , dann ist  $(b_1, \dots, b_k)$  eine Basis von  $T$ . Wie im Beweis von Satz 7.16 ermittelt, gilt dann

$$P_T(v) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T v.$$

AUFGABEN 7.19.

- (1) Gesucht ist die orthogonale Projektion von  $(4, 2)$  auf die Gerade  $G = \{(x, y) \mid 3x - 4y = 0\}$ .

Lösung: Für  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  gilt  $G = S(B)$ . Wegen  $B^T \cdot B = (4^2 + 3^2) = (25)$  und  $B^T \cdot v = (16 + 6) = (22)$  ist

$$P_G(v) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = \frac{22}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (2) Wir berechnen die orthogonale Projektion des Vektors  $v = (6, 0, 0)$  auf die Ebene  $e = L((1, 2, 1), (-1, 0, 1))$ . Wir bilden eine Matrix  $B$ , in deren Spalten wir die Basisvektoren von  $e$  schreiben. In diesem Fall gilt

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_e(v) &= B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### ÜBUNGSAUFGABEN 7.20.

Wir wollen die Pyramide mit der quadratischen Grundfläche  $(A, B, C, D)$  und der Spitze  $S$  als 2D-Graphik auf dem Bildschirm darstellen. Lösen Sie dazu folgende Probleme:

- (1) Sei die Ebene  $e = L(B)$  durch ihre Basis

$$B = \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Bestimmen Sie für  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  die Projektion von  $v$  auf  $L(B)$ , also  $P_{L(B)}(v)$ .

- (2) Bestimmen Sie die Koordinaten von  $P_{L(B)}(v)$  bezüglich  $B$ .  
 (3) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene  $e$ , die durch

$$e : x - 2y + 2z = 0$$

gegeben ist.

- (4) Welcher Punkt auf  $e$  hat von  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$  den geringsten Abstand?

**SATZ 7.21.** Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$P_{T^\perp}(v) = v - P_T(v).$$

*Beweisskizze.* Wir definieren  $y := v - P_T(v)$ . Man kann zeigen, dass  $y$  die Eigenschaften der Projektion von  $v$  auf  $T^\perp$  erfüllt. ■

Aus diesem Satz können wir sofort eine Formel für die Projektion auf  $T^\perp$  ableiten. Sei  $B$  eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten, sodass  $T = S(B)$ . Dann gilt:

$$P_{T^\perp}(v) = (E_n - B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T) \cdot v.$$

### ÜBUNGSAUFGABEN 7.22.

- (1) (a) Bestimmen Sie für jeden Vektor  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  die Projektion auf  $U := \{(x, y, z) \mid -x + 2y + 2z = 0\}$ .  
 (b) Bestimmen Sie eine Matrix  $P_U$ , sodass die Projektion von  $v$  auf  $U$  gleich  $P_U \cdot v$  ist.  
 (c) Bestimmen Sie  $P_U \cdot P_U$ !

- (2) Sei  $U := \{(x, y, z) \mid -x + 2y + 2z = 0\}$ .
- Bestimmen sie für jeden Vektor  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  die Projektion von  $v$  auf den Orthogonalraum von  $U$ , also auf  $U^\perp$ .
  - Bestimmen Sie eine Matrix  $P_{U^\perp}$ , sodass die Projektion von  $v$  auf  $U^\perp$  gleich  $P_{U^\perp} \cdot v$  ist.
  - Bestimmen Sie  $P_{U^\perp} \cdot P_{U^\perp}$ .

## 6. Abstandsberechnungen mit Hilfe der Orthogonalprojektion

**6.1. Abstand eines Punktes von einem Unterraum.** Gegeben sei ein Unterraum  $T$  des  $\mathbb{R}^n$  sowie ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ . Gesucht ist jenes  $x \in T$ , das von  $v$  den kleinsten Abstand hat.

**SATZ 7.23.** Sei  $T$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ , und sei  $x \in T$ . Dann sind äquivalent:

- $\|v - x\| = \inf\{\|v - t\| : t \in T\}$ .
- Der Vektor  $x$  ist die Projektion von  $v$  auf  $T$ , also  $x = P_T(v)$ .

*Beweis.* (2) $\Rightarrow$ (1): Wir nehmen an,  $x = P_T(v)$ . Sei  $t \in T$ . Dann gilt

$$\|v - t\|^2 = \|(v - x) + (x - t)\|^2.$$

Da  $v - x \in T^\perp$  und  $x - t \in T$ , gilt

$$\|(v - x) + (x - t)\|^2 = \|v - x\|^2 + \|x - t\|^2.$$

Es gilt also

$$\text{Für alle } t \in T: \|v - t\| \geq \|v - x\|.$$

Also gilt

$$\|v - x\| = \inf\{\|v - t\| : t \in T\}.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei  $x$  so, dass  $\|v - x\| = \inf\{\|v - t\| : t \in T\}$ , und sei  $y = P_T(v)$ . Es gilt dann  $\|v - x\| \leq \|v - y\|$  und  $\|v - x\|^2 = \|(v - y) + (y - x)\|^2 = \|v - y\|^2 + \|y - x\|^2$ . Das ergibt insgesamt  $\|v - y\|^2 \geq \|v - y\|^2 + \|y - x\|^2$ , also  $\|y - x\|^2 = 0$ . Somit gilt  $x = y = P_T(v)$ . ■

### ÜBUNGSAUFGABEN 7.24.

- (1) Welcher Punkt auf der Geraden

$$g = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

hat von  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$  den kleinsten Abstand?

- (2) Wir betrachten den Punkt  $p \in \mathbb{R}^4$  und den Unterraum  $U$  des  $\mathbb{R}^4$ .

$$p = (8, 10, 1, 14),$$

$$U = L((-1, -2, 0, 3)).$$

Welcher Punkt  $p_0$  aus  $U$  hat von  $p$  den kleinsten Abstand?

**6.2. Abstand zwischen zwei linearen Mannigfaltigkeiten.** Wenn  $A$  und  $B$  nicht-leere Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind, dann kann man ihren *Abstand* durch

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\|a - b\| \mid a \in A, b \in B\}$$

definieren.

Gegeben sind zwei lineare Mannigfaltigkeiten  $M_1 = v_1 + T_1$  und  $M_2 = v_2 + T_2$ . Dabei sind  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ , und  $T_1, T_2$  sind Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Wir suchen  $p_1 \in M_1$  und  $p_2 \in M_2$ , sodass

$$\|p_1 - p_2\| = \text{dist}(M_1, M_2).$$

Dazu bestimmen wir  $t_1 \in T_1$  und  $t_2 \in T_2$ , sodass

$$\|(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2)\| = \text{dist}(M_1, M_2).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}(M_1, M_2) &= \inf\{\|(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2)\| \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\} \\ &= \inf\{\|(v_1 - v_2) - (t_2 - t_1)\| \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\} \\ &= \inf\{\|(v_1 - v_2) - s\| \mid s \in T_1 + T_2\}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass  $(v_1 - v_2) - \bar{s}$  genau dann das Infimum von  $\{(v_1 - v_2) - s \mid s \in T_1 + T_2\}$  annimmt, wenn  $\bar{s} = P_{T_1+T_2}(v_1 - v_2)$ . Also berechnen wir

$$\bar{s} := P_{T_1+T_2}(v_1 - v_2).$$

Folglich gilt für  $\bar{t}_1 \in T_1$  und  $\bar{t}_2 \in T_2$  die Gleichung

$$(v_1 + \bar{t}_1) - (v_2 + \bar{t}_2) = \inf\{(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2) \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\}$$

genau dann, wenn  $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{s}$ . Wir müssen also alle  $(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \in T_1 \times T_2$  bestimmen, sodass  $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{s}$ . Wir bestimmen uns also ein  $t'_1 \in T_1$  und ein  $t'_2 \in T_2$ , sodass  $t'_2 - t'_1 = \bar{s}$ . Dann gilt

$$\{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid t_1 - t_2 = s\} = \{t'_1 + r, t'_2 + r \mid r \in T_1 \cap T_2\}.$$

Damit erhalten wir

$$\{(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2 \mid \|p_1 - p_2\| = \text{dist}(M_1, M_2)\} = \{(v_1 + t'_1 + r, v_2 + t'_2 + r) \mid r \in T_1 \cap T_2\}.$$

**AUFGABE 7.25.** Bestimmen Sie jene Punkte auf den Mannigfaltigkeiten

$$M_1 := (5, 0, 0, 0) + L((1, 2, -1, 0), (1, 1, 1, 1))$$

und

$$M_2 := (11, 27, 2, 11) + L((1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, 1)),$$

die voneinander geringsten Abstand haben.

Sei  $T_1 = L((1, 2, -1, 0), (1, 1, 1, 1))$  und  $T_2 = L((1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, 1))$ . Wir berechnen eine Basis von  $T_1 + T_2$ .

$$\text{In}[102] := \mathbf{B1} = \{\{1, 2, -1, 0\}, \{1, 1, 1, 1\}\};$$

$$\mathbf{B2} = \{\{1, -1, -1, 1\}, \{1, 0, 0, 1\}\};$$

Out [102] =  $\{\{1, -1, -1, 1\}, \{1, 0, 0, 1\}\}$

In [103] := **BasisVonT1PlusT2 = RowReduce [B1 ~Join~ B2]**

Out [103] =  $\{\{1, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 0, -\frac{1}{3}\}, \{0, 0, 1, \frac{1}{3}\}, \{0, 0, 0, 0\}\}$

Also erhalten wir

$$B = ((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1/3), (0, 0, 1, 1/3))$$

als Basis von  $T_1 + T_2$ . Jetzt können wir die Projektion von  $v_1 - v_2$  auf  $T_1 + T_2$  ausrechnen. Sei  $C$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$P_{T_1+T_2}(v_1 - v_2) = C \cdot (C^T \cdot C)^{-1} \cdot C^T \cdot (v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} -12 \\ -25 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Also gilt  $\bar{s} = (-12, -25, -4, -5)$ . Dieses  $\bar{s}$  wollen wir als  $-t'_1 + t'_2$  mit  $t'_1 \in T_1$  und  $t'_2 \in T_2$  darstellen. Durch die folgenden Mathematica-Berechnungen erhalten wir

$$\bar{s} = -7 \cdot (1, 2, -1, 0) - 8 \cdot (1, 1, 1, 1) + 3 \cdot (1, -1, -1, 1) + 0 \cdot (1, 0, 0, 1).$$

In [104] := **s**

Out [104] =  $\{-12, -25, -4, -5\}$

In [105] := **B1B2 = B1 ~Join~ B2**

Out [105] =  $\{\{1, 2, -1, 0\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, -1, -1, 1\}, \{1, 0, 0, 1\}\}$

In [106] := **M = Transpose [B1B2]**

Out [106] =  $\{\{1, 1, 1, 1\}, \{2, 1, -1, 0\}, \{-1, 1, -1, 0\}, \{0, 1, 1, 1\}\}$

In [107] := **MatrixForm [M]**

Out [107] =  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In [108] := **LinearSolve [M, s]**

Out [108] =  $\{-7, -8, 3, 0\}$

Für  $t'_1 = 7 \cdot (1, 2, -1, 0) + 8 \cdot (1, 1, 1, 1)$  und  $t'_2 = 3 \cdot (1, -1, -1, 1)$  gilt also

$$\bar{s} = -t'_1 + t'_2.$$

Wir erhalten

$$t'_1 = (15, 22, 1, 8), \quad t'_2 = (3, -3, -3, 3).$$

Also sind die Punkte

$$p_1 = (5, 0, 0, 0) + (15, 22, 1, 8) = (20, 22, 1, 8)$$

und

$$p_2 = (11, 27, 2, 11) + (3, -3, -3, 3) = (14, 24, -1, 14)$$

so, dass  $p_1 \in M_1$ ,  $p_2 \in M_2$ , und  $\|p_1 - p_2\| = \text{dist}(M_1, M_2)$ .

Um alle Punkte zu erhalten, für die der Abstand minimal wird, müssen wir noch  $T_1 \cap T_2$  berechnen.

```
In[109] := C1 = NullSpace [{{1, 2, -1, 0}, {1, 1, 1, 1}}];
```

```
MatrixForm[C1]
```

```
Out[109] =  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[110] := C2 = NullSpace [{{1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 1}}];
```

```
MatrixForm[C2]
```

```
Out[110] =  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[111] := NullSpace [Join[C1, C2]]
```

```
Out[111] = {{1, 1, 1, 1}}
```

Wir erhalten  $T_1 \cap T_2 = L((1, 1, 1, 1))$ . Somit ist die Menge aller Paare in  $M_1 \times M_2$ , die minimalen Abstand voneinander haben, gegeben als

$$\{(20, 22, 1, 8) + t \cdot (1, 1, 1, 1), (14, 24, -1, 14) + t \cdot (1, 1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Folgendes Mathematica-Programm liefert zwei Punkte mit minimaler Distanz. Achtung: die Basisvektoren von  $T_1$  und  $T_2$  stehen hier in den *Zeilen* der Argumente  $B_1$  und  $B_2$ .

```
Proj [B_, v_] :=
```

```
Transpose [B] . Inverse [B . Transpose[B]]. B . v;
```

```
PointsWithMinimalDistance [v1_, B1_, v2_, B2_] :=
```

```
Module[{},
```

```
B12 = RowReduce [B1 ~Join~ B2];
```

```
If [MatrixRank[B12] == 0,
```

```
{v1, v2},
```

```
Basis12 = Take [B12, MatrixRank [B12]];]
```

```
s = Proj [Basis12, v1 - v2];
```

```
t1 = - Transpose [B1].Take [LinearSolve
```

```
[Transpose [B1 ~Join~ B2], s], Length [B1]];]
```

```
t2 = s + t1;
```

```
{v1 + t1, v2 + t2}
```

```
]
```

```
];
```

Wir testen dieses Programm:

`In [112] := << abstand2.m`

`In [113] := v1 = {5, 0, 0, 0};`

`v2 = {11, 27, 2, 11};`

`T1 = {{1, 1, 1, 1}, {1, 2, -1, 0}};`

`T2 = {{1, 0, 0, 1}, {1, -1, -1, 1}};`

`In [114] := PointsWithMinimalDistance [v1, T1, v2, T2]`

`Out [114] = {{23, 25, 4, 11}, {17, 27, 2, 17}}`

### ÜBUNGSAUFGABEN 7.26.

- (1) Welcher Punkt auf der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

hat von  $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$  den geringsten Abstand?

- (2) Bestimmen Sie den Punkt auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ , der am nächsten beim Punkt  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  liegt.
- (3) (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums  $W$  von  $\mathbb{R}^4$ , der durch

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + x_3 = 0 \text{ und } -x_2 + x_4 = 0\}.$$

gegeben ist.

- (b) Welcher Punkt in  $W$  hat von  $(4, -1, 6, -1)$  den geringsten Abstand?
- (4) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  von der Geraden  $g$ , die durch den Punkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$  geht, und deren Richtungsvektor gleich  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist.
- (5) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $(8, 2, 11, 17)$  von der Geraden  $g$ , die durch

$$g : X = (1, 2, -4, 7) + t \cdot (12, 0, 3, 4)$$

gegeben ist. Welcher Geradenpunkt ist diesem Punkt am nächsten?

- (6) (a) Welcher Punkt  $p$  auf der Geraden

$$g : -2x + z = 0 \text{ und } 2x + y = 0$$

hat vom Punkt  $v = \begin{pmatrix} -10 \\ -25 \end{pmatrix}$  den geringsten Abstand?

- (b) Wie groß ist dieser Abstand?
- (c) Berechnen Sie  $v - p$ ! Welchen Winkel schließen  $p$  und  $v - p$  miteinander ein?
- (7) Welcher Punkt der Ebene

$$e : X = \begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kommt dem Punkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  am nächsten?

- (8) Welche Punkte der Geraden

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : X = \begin{pmatrix} -24 \\ -52 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kommen einander am nächsten?

- (9) Welcher Punkt der Ebene

$$e : X = \begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kommt dem Punkt  $\begin{pmatrix} -47 \\ -95 \\ 34 \end{pmatrix}$  am nächsten?

(10) Welcher Punkt der Ebene

$$e : X = (5, 2, 1, 0) + \lambda \cdot (1, 2, 0, 0) + \mu \cdot (0, 1, 2, -1)$$

kommt der Geraden

$$g : X = (5, 3, 0, 5) + \alpha \cdot (1, 0, 2, 0)$$

am nächsten?

(11) Berechnen Sie den Inkreismittelpunkt  $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$  des Dreiecks  $ABC$  mit  $A = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , indem Sie die Bedingung, dass  $I$  gleich weit von  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  entfernt ist, in Gleichungen in den Variablen  $i_1$  und  $i_2$  umwandeln. Verwenden Sie zur Lösung der auftretenden Gleichungen den Mathematica-Befehl `Solve`.

## 7. Die bestapproximierende Lösung eines linearen Gleichungssystems

Oft trifft man auf Gleichungssysteme, die keine Lösung besitzen, wie z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In solchen Fällen wird man ein  $x$  suchen, das dem Gleichungssystem “möglichst gut” genügt. Naheliegender ist es, jenes  $x$  als “Lösung” zu betrachten, das den kleinsten Fehler liefert, d.h. für das  $\|A \cdot x - b\|$  minimal ist.

**DEFINITION 7.27.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Eine *bestapproximierende Lösung* des Gleichungssystems  $A \cdot x = b$  ist ein  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\|A \cdot x^* - b\|$  minimal ist.

Wir wissen, dass  $\{A \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  genau der Spaltenraum von  $A$  ist. Wir suchen also jenes Element des Spaltenraumes von  $A$ , das von  $b$  minimalen Abstand hat. Dazu sollte  $A \cdot x$  die Projektion von  $b$  auf den Spaltenraum von  $A$  sein. Dann steht  $b - A \cdot x$  auf dem Spaltenraum von  $A$  normal. Es gilt also

$$A^T \cdot (b - A \cdot x) = 0.$$

Wenn  $A^T \cdot A$  invertierbar ist, dann können wir  $x$  durch  $x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$  bestimmen.

**SATZ 7.28.** Sei  $A$  eine Matrix, deren Spaltenvektoren linear unabhängig sind, und sei  $b$  ein Vektor. Dann ist die bestapproximierende Lösung  $x^*$  von  $A \cdot x = b$  gegeben durch

$$x^* = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b.$$

**AUFGABE 7.29.** Wir bestimmen die bestapproximierende Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir

$$x^* = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

## ÜBUNGSAUFGABEN 7.30.

- (1) Das Gleichungssystem
- $A \cdot x = b$
- ist für folgendes
- $A$
- und
- $b$
- unlösbar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die "beste Näherungslösung". Warum (bzw. in welchem Sinn) ist diese Lösung "besser" als  $(1, 1)$ ?

Nun versuchen wir, die "beste Gerade durch eine Punktwolke" zu legen.

Gegeben seien die Punkte  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Gesucht ist die bestapproximierende Gerade  $y = kx + d$  durch diese Punktwolke.

Dafür berechnet man die bestapproximierende Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

wie oben beschrieben. Wir überlegen uns noch, welcher "Abstand" zwischen Punkten und Gerade hier wirklich minimiert wird. Die bestapproximierende Lösung minimiert

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y_1 - (kx_1 + d) \\ \vdots \\ y_n - (kx_n + d) \end{pmatrix} \right\|,$$

also die Vertikalabstände zwischen den Punkten und der Gerade.

## ÜBUNGSAUFGABEN 7.31.

- (1) Bestimmen Sie jene Gerade der Form
- $y = kx + d$
- , die die Punkte
- $(0, 3)$
- ,
- $(1, 4)$
- und
- $(2, 7)$
- bestmöglich approximiert. "Bestmöglich" heißt dabei, dass
- $k$
- und
- $d$
- so zu bestimmen sind, dass

$$(y_1 - (kx_1 + d))^2 + (y_2 - (kx_2 + d))^2 + (y_3 - (kx_3 + d))^2$$

minimal wird.

- (2) Bestimmen Sie jene Gerade der Form
- $y = kx + d$
- , die die Punkte
- $(2, 3)$
- ,
- $(3, 0)$
- und
- $(6, 5)$
- bestmöglich approximiert. "Bestmöglich" heißt dabei, dass
- $k$
- und
- $d$
- so zu bestimmen sind, dass

$$(y_1 - (kx_1 + d))^2 + (y_2 - (kx_2 + d))^2 + (y_3 - (kx_3 + d))^2$$

minimal wird.

## KAPITEL 8

### Ringe, Körper und Vektorräume

Nachrichten codiert man gerne als Listen von Bits. Deswegen wird es sich als günstig herausstellen, dass man nicht nur mit Vektoren, deren Einträge reelle Zahlen sind, rechnen kann, sondern auch mit Vektoren, deren Einträge nur 0 oder 1 sein können. Unser Wissen über das Lösen linearer Gleichungssysteme lässt sich auf solche 0/1-Vektoren verallgemeinern; das ist in der Codierungstheorie hilfreich.

#### 1. Kommutative Ringe mit Eins

Unser Ziel ist, anstelle der reellen Zahlen auch andere Objekte verwenden zu können, solange man diese Objekte sinnvoll addieren und multiplizieren kann.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  $n$ -stellige Operation auf  $A$  ist eine Funktion von  $A^n$  nach  $A$ . Eine Algebra ist ein Paar  $(A, F)$ , wobei  $A$  eine nichtleere Menge, und  $F$  eine Familie von endlichstelligen Operationen auf  $A$  ist. Wenn  $F = (f_1, \dots, f_k)$ , so bezeichnet man sowohl das Paar  $(A, F)$  als auch das Tupel  $(A, f_1, \dots, f_k)$  als Algebra.

DEFINITION 8.1. Eine Algebra  $\langle R, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, wenn  $+$ ,  $\cdot$  binäre Operationen auf  $R$  sind,  $-$  eine unäre Operation auf  $R$  ist, und  $0, 1$  Elemente aus  $R$  sind, sodass für alle  $x, y, z \in R$  die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (1)  $x + 0 = x$
- (2)  $x + (-x) = 0$
- (3)  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (4)  $x + y = y + x$
- (5)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (6)  $x \cdot y = y \cdot x$
- (7)  $x \cdot 1 = x$
- (8)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

SATZ 8.2. Sei  $\langle R, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  ein kommutativer Ring mit 1, und seien  $x, y \in R$ . Dann gilt

- (1)  $-(-x) = x$
- (2)  $x \cdot 0 = 0$ .
- (3)  $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$ .

*Beweis:* (1):  $-(-x) = -(-x) + 0 = 0 + (-(-x)) = (x + (-x)) + (-(-x)) = x + ((-x) + (-(-x))) = x + 0 = x$ . (2):  $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) = x \cdot (0 + 0) + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = 0$ . (3): Wir verwenden jetzt außer den bei der Definition von kommutativen Ringen verwendeten Gleichungen auch die Folgerungen, dass für alle  $z \in R$  auch  $(-z) + z = 0$  und  $0 + z = z$  gilt.  $-(x \cdot y) = -(x \cdot y) + x \cdot 0 = -(x \cdot y) + x \cdot (y + (-y)) = -(x \cdot y) + (x \cdot y + x \cdot (-y)) = (-(x \cdot y) + x \cdot y) + x \cdot (-y) = 0 + x \cdot (-y) = x \cdot (-y)$ . Mithilfe des Kommutativgesetzes folgt nun auch  $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ . ■

**DEFINITION 8.3.** Sei  $R = \langle R, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  ein kommutativer Ring mit Eins.  $R$  ist ein *Körper*, wenn folgendes gilt:

- (1)  $|R| \geq 2$ ,
- (2) für alle  $x \in R$  mit  $x \neq 0$  gibt es ein  $y \in R$ , sodass  $x \cdot y = 1$ .

#### ÜBUNGSAUFGABEN 8.4.

- (1) Zeigen Sie, dass es in einem Körper für jedes  $x$  höchstens ein  $y$  mit  $x \cdot y = 1$  geben kann.
- (2) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Elemente in einem Körper nur dann 0 ist, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist.

In einem Körper hat jedes Element  $a \neq 0$  genau ein multiplikativ inverses Element; wir bezeichnen es mit  $a^{-1}$ .

Der zweielementige Ring  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  mit  $0 \oplus 0 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1$ ,  $1 \oplus 0 = 1$ ,  $1 \oplus 1 = 0$ ,  $0 \odot 0 = 0$ ,  $0 \odot 1 = 0$ ,  $1 \odot 0 = 0$ ,  $1 \odot 1 = 1$  ist ein Körper.

## 2. Vektorräume

**DEFINITION 8.5.** Sei  $K$  ein Körper. Ein Tupel  $\langle V, +, -, 0, * \rangle$  heißt *Vektorraum* über  $K$ , wenn  $V \neq \emptyset$ ,  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$ ,  $-$  :  $V \rightarrow V$ ,  $0 \in V$  und  $*$  :  $K \times V \rightarrow V$ , und für alle  $x, y, z \in V$  und  $\alpha, \beta \in K$  gilt:

- (1)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,
- (2)  $0 + x = x$ ,
- (3)  $(-x) + x = 0$ ,
- (4)  $x + y = y + x$ ,
- (5)  $\alpha * (\beta * x) = (\alpha \cdot \beta) * x$ ,
- (6)  $(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$ ,
- (7)  $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$ ,
- (8)  $1 * x = x$ .

#### BEISPIELE 8.6.

- (1) Für jeden Körper  $K$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $K^n$  (mit geeignet definierten Operationen) ein Vektorraum über  $K$ .
- (2) Für jeden Unterraum  $U$  des  $\mathbb{R}^n$  ist  $U$  (mit geeignet definierten Operationen) ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

DEFINITION 8.7. Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Sei  $U$  eine Teilmenge von  $V$ .  $U$  ist ein *Unterraum* von  $V$ , wenn  $U \neq \emptyset$ , und für alle  $u, v \in U$  und  $\alpha \in K$  gilt  $u + v \in U$  und  $\alpha * u \in U$ .

Wenn  $U$  ein Unterraum von  $V = \langle V, +, -, 0, * \rangle$  ist, dann ist  $U = \langle U, +|_{U \times U}, -|_U, 0, *|_{K \times U} \rangle$  ebenfalls ein Vektorraum über  $K$ .



## KAPITEL 9

### Lineare Abbildungen

#### 1. Beispiele

Wir betrachten einige Funktionen, die von einem Vektorraum in einen Vektorraum gehen.

AUFGABE 9.1. Sei  $s$  jene Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ , die jeden Punkt auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an der  $x$ -Achse landet. Dann lässt sich  $s$  so schreiben:

$$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 9.2. Wir überlegen uns, wo der Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  nach einer Drehung um den Nullpunkt um  $60^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn landet. Sei  $d$  diese Drehung. Dann lässt sich  $d$  so schreiben:

$$d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 9.3. Wir bestimmen die Projektion des Punktes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  auf  $U = L((0, 1, 2), (3, 0, 4))$ . Sei  $p_U$  diese Projektionsabbildung. Wir berechnen die Projektionsmatrix  $P_U$  in folgender Rechnung:

```
In[115] := B = Transpose [{0, 1, 2}, {3, 0, 4}]
```

```
Out[115] = {{0, 3}, {1, 0}, {2, 4}}
```

```
In[116] := PU = B . Inverse [Transpose [B] . B] . Transpose [B];
```

```
MatrixForm [PU]
```

$$\text{Out}[116] = \begin{pmatrix} \frac{45}{61} & -\frac{24}{61} & \frac{12}{61} \\ \frac{24}{61} & \frac{25}{61} & \frac{18}{61} \\ -\frac{12}{61} & \frac{18}{61} & \frac{52}{61} \end{pmatrix}$$

Somit haben wir eine Matrix  $P_U$  gefunden, sodass  $P_U \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  die Projektion von  $(x, y, z)$  auf  $U$  ist.

Solche Abbildungen, die man durch Matrizen beschreiben kann, werden der Inhalt dieses Kapitels sein.

## 2. Die Definition linearer Abbildungen

DEFINITION 9.4. Seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über dem Körper  $K$ . Eine Abbildung  $h : U \rightarrow V$  ist eine *lineare Abbildung*, wenn:

- (1) für alle  $u_1, u_2 \in U : h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2)$
- (2) für alle  $u \in U$  und für alle  $\lambda \in K : h(\lambda u) = \lambda h(u)$ .

BEISPIEL 9.5. Sei  $K$  ein Körper, und sei  $A \in K^{n \times m}$ . Dann ist die Abbildung  $h$ , die durch

$$\begin{aligned} h : K^m &\longrightarrow K^n \\ x &\longmapsto A \cdot x \end{aligned}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung vom  $K$ -Vektorraum  $K^m$  in den  $K$ -Vektorraum  $K^n$ .

AUFGABE 9.6. Welche der folgenden Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  sind linear?

- (1)  $h_1((x, y)) = 3x - 2y$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $h_2((x, y)) = 3x + 1$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- (3)  $h_3((x, y)) = 0$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Lösung.*

- (1) Wir zeigen, dass die Abbildung  $h_1$  linear ist. Seien dazu  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Es gibt dann  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ , sodass  $u = (x_1, y_1)$  und  $v = (x_2, y_2)$ . Es gilt dann  $h_1(u + v) = 3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (3x_1 - 2y_1) + (3x_2 - 2y_2) = h_1(u) + h_1(v)$  und  $h_1(\lambda u) = 3(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1) = \lambda(3x_1 - 2y_1) = \lambda h_1(u)$ .
- (2)  $h_2$  ist keine lineare Abbildung, da  $h_2((1, 1) + (1, 1)) = h_2((2, 2)) = 7$  und  $h_2((1, 1)) + h_2((1, 1)) = 4 + 4 = 8$ .
- (3)  $h_3$  ist linear.

SATZ 9.7. Sei  $K$  ein Körper, seien  $U, V, W$  Vektorräume über  $K$ , und seien  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen. Dann ist die Hintereinanderausführung  $g \circ f$  ebenfalls linear.

SATZ 9.8. Sei  $K$  ein Körper, sei  $m \in \mathbb{N}$ , und sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit Basis  $B = (b_1, \dots, b_m)$ . Dann ist die Abbildung  $c$ , die durch

$$\begin{aligned} c : V &\longrightarrow K^m \\ v &\longmapsto (v)_B \end{aligned}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung.

*Beweis.* Wir geben hier nur den Beweis dafür, dass  $c(u+v) = c(u)+c(v)$  für alle  $u, v \in V$ . Seien  $u, v \in V$ . Zu zeigen ist, dass  $(u+v)_B = (u)_B + (v)_B$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  und  $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$  so, dass

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = u$$

und

$$\sum_{i=1}^m \mu_i b_i = v.$$

Dann gilt also  $(u)_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  und  $(v)_B = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ . Wir berechnen nun

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) b_i.$$

Es gilt  $\sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) b_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^m \mu_i b_i = u + v$ . Da also  $\sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) b_i = u + v$ , gilt  $(u+v)_B = (\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_m + \mu_m) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) + (\mu_1, \dots, \mu_m) = (u)_B + (v)_B$ . ■

Auch die inverse Abbildung dieser Abbildung ist linear:

**SATZ 9.9.** Sei  $K$  ein Körper, sei  $m \in \mathbb{N}$ , und sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit Basis  $B = (b_1, \dots, b_m)$ . Dann ist die Abbildung  $d$ , die durch

$$d : \begin{array}{ccc} K^m & \longrightarrow & V \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) & \longmapsto & \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \end{array}$$

definiert ist, eine lineare Abbildung.

**SATZ 9.10.** Seien  $U$  und  $V$  Vektorräume über  $K$  mit den Basen  $B = (b_1, \dots, b_m)$  und  $C = (c_1, \dots, c_n)$ . Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Die Funktion  $f : U \rightarrow V$  bilde  $x$  auf jenes  $y$ , das durch

$$(y)_C = A \cdot (x)_B$$

gegeben ist, ab. Dann ist  $h$  eine lineare Abbildung.

*Beweisskizze.* Es gilt  $f = g \circ h \circ i$ , wobei  $i : U \rightarrow K^m$ ,  $u \mapsto (u)_B$ ,  $h : K^m \rightarrow K^n$ ,  $x \mapsto A \cdot x$ ,  $g : K^n \rightarrow V$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ . Alle drei Abbildungen  $g, h, i$  sind linear, also auch ihre Hintereinanderausführung. ■

**AUFGABE 9.11.** Sei  $U$  der Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  mit Basis  $B = ((1, 1, 1), (1, 0, 0))$ , und sei  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v \mapsto (v)_B$ . Dann ist etwa

$$\begin{aligned} h((4, 1, 1)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ h((-1, -1, -1)) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**ÜBUNGSAUFGABEN 9.12.**

- (1) Eine lineare Abbildung von  $h$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  bildet den Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und den Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  ab. Auf welchen Punkt wird  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  abgebildet?
- (2) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn  $h$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^2$  ist und  $h \neq 0$ , dann gilt für alle  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_3$ :

$$(v_1, v_2) \text{ linear unabhängig} \Rightarrow (h(v_1), h(v_2)) \text{ linear unabhängig.}$$

### 3. Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen

Sei  $h : U \rightarrow V$  eine lineare Abbildung,  $B = (b_1, \dots, b_m)$  eine Basis von  $U$ . Sei  $x \in U$  mit  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot b_i$ . Dann gilt wegen der Linearität von  $h$ :

$$h(x) = h\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot b_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot h(b_i).$$

Eine lineare Abbildung ist also durch die Bilder der Basisvektoren bereits vollständig bestimmt.

Wir werden jetzt sehen, dass sich jede lineare Abbildung, deren Definitions- und Bildbereich endlichdimensionale Vektorräume sind, durch eine Matrix darstellen lässt.

**DEFINITION 9.13.** Seien  $U, V$  Vektorräume über  $K$ , seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $B = (b_1, \dots, b_m)$  eine Basis von  $U$  und  $C = (c_1, \dots, c_n)$  eine Basis von  $V$ . Sei  $h$  eine lineare Abbildung von  $U$  nach  $V$ . Wir definieren nun die  $n \times m$ -Matrix  $S_h(B, C)$ . Dazu legen wir fest, dass für  $i \in \{1, \dots, m\}$  in der  $i$ -ten Spalte von  $S_h(B, C)$  der Vektor  $(h(b_i))_C$  steht. Es gilt also

$$S_h(B, C) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ (h(b_1))_C & (h(b_2))_C & \cdots & (h(b_m))_C \\ | & | & & | \end{array} \right).$$

Die Matrix  $S_h(B, C) \in K^{n \times m}$  heißt *Abbildungsmatrix* oder *Darstellungsmatrix* von  $h$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$ .

**SATZ 9.14.** Seien  $U, V$  Vektorräume über  $K$ , seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $B = (b_1, \dots, b_m)$  eine Basis von  $U$  und  $C = (c_1, \dots, c_n)$  eine Basis von  $V$ . Sei  $h$  eine lineare Abbildung von  $U$  nach  $V$ . Dann gilt

$$(9.1) \quad (h(u))_C = S_h(B, C) \cdot (u)_B \text{ für alle } u \in U.$$

*Beweis.* Sei  $u \in U$  mit  $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (h(u))_C &= \left( h\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i\right) \right)_C \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i h(b_i) \right)_C \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i (h(b_i))_C \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ (h(b_1))_C & (h(b_2))_C & \cdots & (h(b_m))_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= S_h(B, C) \cdot (u)_B. \end{aligned}$$

■

Wir zeigen nun, dass die Abbildungsmatrix durch die Gleichung (9.1) eindeutig bestimmt ist.

**SATZ 9.15.** Seien  $U, V$  Vektorräume über  $K$ , seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , sei  $B = (b_1, \dots, b_m)$  eine Basis von  $U$  und  $C = (c_1, \dots, c_n)$  eine Basis von  $V$ . Sei  $h$  eine lineare Abbildung von  $U$  nach  $V$ , und sei  $A$  eine  $n \times m$ -Matrix, sodass für alle  $u \in U$ :

$$(9.2) \quad (h(u))_C = A \cdot (u)_B.$$

Dann gilt  $A = S_h(B, C)$ .

*Beweis.* Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Wegen (9.2) gilt  $(h(b_i))_C = A \cdot (b_i)_B$ , also

$$(h(b_i))_C = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Einser an der  $i$ ten Stelle steht. Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt die  $i$ -te Spalte von  $A$ . Also ist die  $i$ -te Spalte von  $A$  gleich  $(h(b_i))_C$ . Daher  $A = S_h(B, C)$ . ■

**AUFGABE 9.16.** Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die folgende lineare Abbildung.

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 2x+y \\ -x+4y \end{pmatrix}.$$

Sei  $B$  die Basis  $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$  des  $\mathbb{R}^2$ , und sei  $C$  die Basis  $\left(\begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 39 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$  des  $\mathbb{R}^3$ . Bestimmen Sie  $S_h(B, C)$ .

**Lösung:** Es gilt

$$h(b_1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad h(b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -13 & 39 & 1 \\ -7 & 30 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

erhalten wir  $(h(b_1))_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und ebenso  $(h(b_2))_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Insgesamt erhalten wir

$$S_h(B, C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In Mathematica kann man die notwendigen Rechnungen so durchführen:

```
In[117] := h[x_, y_] = {{3, -2}, {2, 1}, {-1, 4}} . {x, y}
```

```
Out[117] = {3 x - 2 y, 2 x + y, -x + 4 y}
```

```
In[118] := hb1 = h[-1, 2]
```

```
Out[118] = {-7, 0, 9}
```

```
In[119] := hb2 = h[4, 5]
```

```
Out[119] = {2, 13, 16}
```

```
In[120] := CC = {{-9, 20, 0}, {-13, 39, 1}, {-7, 30, 0}}
```

```
Out[120] = {{-9, 20, 0}, {-13, 39, 1}, {-7, 30, 0}}
```

```
In[121] := MatrixForm[CC]
```

```
Out[121] =  $\begin{pmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -13 & 39 & 1 \\ -7 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
In[122] := LinearSolve[CC, hb1]
```

```
Out[122] = {3, 1, 0}
```

```
In[123] := LinearSolve[CC, hb2]
```

```
Out[123] = {2, 1, 0}
```

AUFGABE 9.17. Sei  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $V = \mathbb{R}^1$  mit den kanonischen Basen  $B = ((1, 0), (0, 1))$  und  $C = ((1))$ . Die lineare Abbildung  $h : U \rightarrow V$  sei definiert durch

$$h((x, y)) = (3x - 2y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist  $(h(b_1))_C = (3)$  und  $(h(b_2))_C = (-2)$ . Somit gilt

$$S_h(B, C) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 9.18. Sei  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $V = \mathbb{R}^1$  mit den Basen  $B = ((2, 3), (3, -2))$ ,  $C = ((2))$ . Die lineare Abbildung  $h : U \rightarrow V$  sei definiert durch

$$h((x, y)) = (3x - 2y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $h(b_1) = 0$ , also  $(h(b_1))_B = (0)$  und  $h(b_2) = (13)$ , also  $(h(b_2))_B = 6.5$ , und folglich  $S_h(B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 6.5 \end{pmatrix}$ .

## ÜBUNGS-AUFGABEN 9.19.

- (1) Eine lineare Abbildung  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch  $h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $h\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $S_h(E, E)$ , wobei  $E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .
- (2) Seien  $E_2, E_3$  die kanonischen Basen von  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , und sei

$$\sigma((x, y, z)) := (3x - 2y, 2z).$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix  $S_\sigma(E_3, E_2)$  an.

#### 4. Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen

Wir wollen nun die Abbildungsmatrizen für bestimmte Drehungen und Spiegelungen bestimmen. Wir betrachten folgende Beispiele:

AUFGABE 9.20. Sei  $e$  die Ebene  $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ , und sei  $\sigma$  jene Abbildung, die jeden Punkt im  $\mathbb{R}^3$  auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an der Ebene  $e$  landet.

Gesucht ist die Abbildungsmatrix  $S_\sigma(E, E)$  dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis  $E$  des  $\mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 9.21. Sei  $g$  die Gerade mit der Gleichung  $5x - 2y = 0$  im  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $\sigma$  jene Abbildung, die jeden Punkt im  $\mathbb{R}^2$  auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Spiegelung an  $g$  landet.

Gesucht ist die Abbildungsmatrix  $S_\sigma(E, E)$  dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis  $E$  des  $\mathbb{R}^2$ .

AUFGABE 9.22. Sei  $g$  die Gerade  $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ , und sei  $\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jene Abbildung, die jeden Punkt auf den Punkt abbildet, auf dem er nach der Drehung um  $60^\circ$  um die Gerade  $g$  landet. Wir müssen noch die Richtung der Drehung festlegen: Wenn wir vom Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  auf die Ebene  $x + 2y - 2z = 0$  hinunterschauen, dann sollen sich die Punkte dieser Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Alle drei Beispiele kann man mit dem gleichen "Programm" lösen. Sei  $h$  die angegebene lineare Abbildung. Dann gehen wir so vor:

- (1) Bestimme eine Basis  $B$ , sodass  $S_h(B, B)$  leicht zu bestimmen ist.
- (2) Bestimme  $S_h(B, B)$ .
- (3) Bestimme  $S_h(E, E)$  aus  $S_h(B, B)$ .

Die Schritte (1) und (2) können wir bereits jetzt durchführen; für den Schritt (3) müssen wir uns noch überlegen, wie man aus den Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis die Koordinaten bezüglich einer anderen Basis ausrechnet.

Wir starten mit Beispiel 9.20. Wir wählen eine Basis  $(b_1, b_2, b_3)$  des  $\mathbb{R}^3$ , sodass  $b_1, b_2$  in der Ebene  $e$  liegen, und  $b_3$  auf  $b_1$  und  $b_2$  normal steht. Es gilt dann  $\sigma(b_1) = b_1$ ,

$\sigma(b_2) = b_2$  und  $\sigma(b_3) = -b_3$ . Also gilt  $(\sigma(b_1))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(\sigma(b_2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $(\sigma(b_3))_B = (-b_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Dann gilt

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine Basis  $B$  mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu wählen wir  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Wir bestimmen einen Vektor, der auf beiden normal steht:

`In [124] := NullSpace [ {{1, 2, -1}, {0, 1, -1}} ]`

`Out [124] = {{-1, 1, 1}}`

Also wählen wir  $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , und somit

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Wir bestimmen nun  $B$  und  $S_\sigma(B, B)$  für Beispiel 9.21. Wir wählen eine Basis  $(b_1, b_2)$  des  $\mathbb{R}^2$ , sodass  $b_1$  auf der Gerade  $g$  liegt, und  $b_2$  auf  $b_1$  normal steht. Es gilt dann  $\sigma(b_1) = b_1$  und  $\sigma(b_2) = -b_2$ , und somit  $(\sigma(b_1))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $(\sigma(b_2))_B = (-b_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Dann gilt

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun eine Basis  $B$  mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu wählen wir  $b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Wir erhalten

$$B = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Nun bestimmen wir  $B$  und  $S_\delta(B, B)$  für Beispiel 9.22. Dazu bestimmen wir eine Orthonormalbasis  $B$  von  $\mathbb{R}^3$ , sodass  $b_3 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Außerdem soll  $(b_1, b_2, b_3)$  *positiv orientiert* sein. Das heißt: "Wenn man  $b_1$  in  $b_2$  hineinschraubt, dann soll sich eine Schraube mit Rechtsgewinde in Richtung  $b_3$  bewegen." Eine ONB  $(b_1, b_2, b_3)$  ist dann positiv orientiert, wenn  $b_1 \times b_2 = b_3$ . Zu dieser Basis  $B$  bestimmen wir jetzt die Matrix  $S_\delta(B, B)$ . Es gilt  $h(b_3) = b_3$ ,  $h(b_1) = \cos(60^\circ)b_1 + \sin(60^\circ)b_2$ , und  $h(b_2) = -\sin(60^\circ)b_1 + \cos(60^\circ)b_2$ . Mit  $c := \cos(60^\circ)$  und  $s := \sin(60^\circ)$  lässt sich  $S_\delta(B, B)$  also durch

$$S_\delta(B, B) = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

angeben. Jetzt bestimmen eine Basis  $B$  des  $\mathbb{R}^3$  mit den gewünschten Eigenschaften. Dazu bestimmen wir zunächst eine ONB der Ebene  $e = (L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}))^\perp$ . Wir bestimmen eine Basis für diese Ebene:

In[125] := **NullSpace**[ {{1, 2, -2}}]

Out[125] = {{2, 0, 1}, {-2, 1, 0}}

Daher ist  $((2, 0, 1), (-2, 1, 0))$  eine Basis von  $e$ . Wir bestimmen nun eine ONB von  $e$ .

In[126] := **e1** = {2, 0, 1};

**e2** = {-2, 1, 0};

**d1** = **e1** / **Sqrt**[**e1** . **e1**]

Out[126] =  $\left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$

In[127] := **c2** = **e2** - (**e2** . **d1**) \* **d1**

Out[127] =  $\left\{ -\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5} \right\}$

In[128] := **d2** = **c2** / **Sqrt**[**c2** . **c2**]

Out[128] =  $\left\{ -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3\sqrt{5}} \right\}$

Daher ist die Basis  $F$ , die durch

$$F = \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben ist, eine ONB des  $\mathbb{R}^3$ . Wir bestimmen, ob  $F$  positive Orientierung hat:

In[129] := **Cross**[**d1**, **d2**]

Out[129] =  $\left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$

Die Orientierung ist also noch falsch. Wenn wir das Vorzeichen von  $f_1$  umdrehen, erhalten wir eine Basis mit positiver Orientierung. (Man kann genausogut das Vorzeichen von  $f_2$  umdrehen. Man darf aber nicht das Vorzeichen von  $f_3$  umdrehen; die Basis, die man durch Umdrehen des Vorzeichens von  $f_3$  erhält, ist zwar positiv orientiert, aber ihr dritter Basisvektor ist nicht mehr der gewünschte.) Wir schreiben die Basisvektoren von  $B$  in die Spalten der Matrix  $\bar{B}$ .

In[130] := **d3** = **Cross** [-**d1**, **d2**]

Out[130] =  $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\}$

In[131] := **B** = **Transpose** [{-**d1**, **d2**, **d3**}]

Out[131] =  $\left\{ \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3} \right\}, \left\{ 0, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3} \right\} \right\}$

In[132] := **MatrixForm** [**B**]

Out[132] = 
$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Somit haben wir auch für Beispiel 9.22 eine Basis  $B$  und die Matrix  $S_\delta(B, B)$  gefunden.

### 5. Basistransformationen

Wir lösen folgendes Problem: Gegeben sind zwei Basen  $B, C$  des gleichen Unterraums  $U$  des  $\mathbb{R}^n$ , und die Koordinaten  $(v)_B$  eines Vektors  $v \in U$ . Gesucht sind die Koordinaten von  $v$  bezüglich  $C$ , also  $(v)_C$ .

AUFGABE 9.23. Sei  $B = ((1, 0, 1), (1, -1, 0))$  und  $C = ((3, -2, 1), (1, 1, 2))$ , und sei  $(x)_B = (1, -1)$ . Gesucht ist  $(x)_C$ .

*Lösung:* Aus  $B$  und  $(x)_B$  können wir

$$x = B \cdot (x)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Wegen  $C \cdot (x)_C = x$  gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x)_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir  $(x)_C = (-0.2, 0.6)$ .

Allgemein gehen wir also so vor: Wenn  $\bar{B}$  und  $\bar{C}$  die Matrizen sind, in deren Spalten die Vektoren von  $B$  beziehungsweise  $C$  stehen. Dann lässt sich  $(x)_C$  aus der Gleichung

$$\bar{C} \cdot (x)_C = \bar{B} \cdot (x)_B$$

berechnen. Wenn  $\bar{C}$  gleich viele Spalten wie Zeilen hat, dann ist  $\bar{C}$  invertierbar, und wir erhalten

$$(x)_C = \bar{C}^{-1} \cdot \bar{B} \cdot (x)_B.$$

Wenn  $\bar{C}$  weniger Spalten als Zeilen hat, dann wissen wir, dass die Spaltenvektoren von  $\bar{C}$  linear unabhängig sind. Da  $\bar{C}$  eine Matrix über den reellen Zahlen ist, ist  $\bar{C}^T \cdot \bar{C}$  invertierbar. Dann gilt:  $\bar{C}^T \cdot \bar{C} \cdot (x)_C = \bar{C}^T \cdot \bar{B} \cdot (x)_B$ , und somit

$$(x)_C = (\bar{C}^T \cdot \bar{C})^{-1} \cdot \bar{C}^T \cdot \bar{B} \cdot (x)_B.$$

DEFINITION 9.24. Sei  $K$  ein Körper, sei  $U$  ein Unterraum von  $K^n$ , und seien  $B$  und  $C$  Basen von  $U$ . Eine Matrix  $T$  ist eine *Basistransformationsmatrix* von  $B$  nach  $C$ , wenn für alle  $u \in U$  gilt

$$(u)_C = T \cdot (u)_B.$$

Es gibt genau eine solche Matrix. Wir kürzen sie mit  ${}_C T_B$  ab. Es gilt also

$$(u)_C = {}_C T_B \cdot (u)_B \text{ für alle } u \in U.$$

Die Basistransformationsmatrix ist genau die Abbildungsmatrix  $S_{\text{id}}(B, C)$ , wobei  $\text{id} : U \rightarrow U, u \mapsto u$  die identische Abbildung ist.

Seien  $\overline{B}$  und  $\overline{C}$  die Matrizen, in deren Spalten die Vektoren der Basen  $B$  bzw.  $C$  stehen. Dann kann die Basistransformationsmatrizen so berechnen:

- (1) Falls  $\overline{B}$  und  $\overline{C}$  quadratische Matrizen sind, so gilt  ${}_C T_B := \overline{C}^{-1} \cdot \overline{B}$ .
- (2) Falls  $\overline{C}^T \cdot \overline{C}$  invertierbar ist (das ist immer der Fall, wenn  $K$  der Körper der reellen Zahlen ist), so gilt  ${}_C T_B := (\overline{C}^T \cdot \overline{C})^{-1} \cdot \overline{C}^T \cdot \overline{B}$ .
- (3) In jedem Fall kann man  ${}_C T_B$  als Abbildungsmatrix  $S_{\text{id}}(B, C)$  berechnen. In der  $i$ -ten Spalte von  ${}_C T_B$  steht also  $(b_i)_C$ , also die Lösung des Gleichungssystems  $\overline{C} \cdot x = b_i$ .

ÜBUNGSAUFGABEN 9.25.

- (1) (Koordinaten) Die Ebene  $\varepsilon$  hat die Basen

$$A = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Der Vektor  $v$  hat bezüglich  $B$  die Koordinaten  $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich  $A$ !  
 (b) Bestimmen Sie eine Matrix  $T$ , sodass für alle  $v \in \varepsilon$  gilt:

$$(v)_A = T \cdot (v)_B.$$

(Diese Matrix heißt *Basistransformationsmatrix*).

**6. Die Hintereinanderausführung und die Matrizenmultiplikation**

SATZ 9.26. Seien  $U, V, W$  Vektorräume über dem Körper  $K$  mit den Basen  $A, B, C$ , und seien  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen. Dann gilt

$$(9.3) \quad S_{g \circ f}(A, C) = S_g(B, C) \cdot S_f(A, B).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass für alle  $u \in U$  gilt:

$$(S_g(B, C) \cdot S_f(A, B)) \cdot (u)_A = ((g \circ f)(u))_C.$$

Dann folgt aus Satz 9.15 die Gleichung 9.3. Sei  $u \in U$ . Dann gilt  $(S_g(B, C) \cdot S_f(A, B)) \cdot (u)_A = S_g(B, C) \cdot (S_f(A, B) \cdot (u)_A) = S_g(B, C) \cdot (f(u))_B = (g(f(u)))_C = (g \circ f(u))_C$ . ■

AUFGABE 9.27. Man spiegle den Punkt  $(2, 3)$  an der  $x$ -Achse, und drehe anschließend den gespiegelten Punkt um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt:

*Lösung:* Die Spiegelung  $\sigma$  an der  $x$ -Achse hat bzgl. der kanonischen Basis  $E$  des  $\mathbb{R}^2$  die Darstellungsmatrix  $S_\sigma(E, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Die Drehung  $\delta$  um  $90^\circ$  hat die Darstellungsmatrix  $S_\delta(E, E) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix}$ . Die Darstellungsmatrix der Spiegelung mit

anschließender Drehung ist also

$$S_{\delta \circ \sigma}(E, E) = S_{\delta}(E, E) \cdot S_{\sigma}(E, E) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & \sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & -\cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten  $\delta(\sigma((2, 3))) = (3, 2)$ .

**SATZ 9.28.** Seien  $U, V$  Vektorräume über dem Körper  $K$ , und seien  $A, B$  Basen von  $U$  und  $C, D$  Basen von  $V$ . Sei  $h$  eine lineare Abbildung von  $U$  nach  $V$ . Dann gilt

$$S_h(A, D) = {}_D T_C \cdot S_h(B, C) \cdot {}_B T_A.$$

*Beweisskizze.* Für alle  $u \in U$  gilt  ${}_D T_C \cdot S_h(B, C) \cdot {}_B T_A \cdot (u)_A = (h(u))_D$ . Also gilt nach Satz 9.15  ${}_D T_C \cdot S_h(B, C) \cdot {}_B T_A = S_h(A, D)$ . ■

Das folgende Korollar wird uns helfen, die Beispiele 9.20, 9.21 und 9.22 zu lösen.

**KOROLLAR 9.29.** Sei  $K$  ein Körper, sei  $B$  eine Basis des  $K$ -Vektorraums  $K^n$ , und sei  $E$  die kanonische Basis von  $K^n$ . Sei  $h$  eine lineare Abbildung von  $K^n$  nach  $K^n$ . Dann gilt

$$S_h(E, E) = {}_E T_B \cdot S_h(B, B) \cdot {}_B T_E.$$

Wenn  $\overline{B}$  die Matrix ist, in deren Spalten die Vektoren von  $B$  stehen, so gilt also

$$S_h(E, E) = \overline{B} \cdot S_h(B, B) \cdot \overline{B}^{-1}.$$

## 7. Abbildungsmatrizen für Spiegelungen und Drehungen bezüglich der kanonischen Basis

Wir lösen das Beispiel 9.20. Dazu müssen wir die Abbildungsmatrix  $S_h(E, E)$  aus der Abbildungsmatrix  $S_h(B, B)$  ausrechnen.

`In [133] := B = Transpose [{1, 2, -1}, {0, 1, -1}, {-1, 1, 1}]`

`Out [133] = {{1, 0, -1}, {2, 1, 1}, {-1, -1, 1}}`

`In [134] := ShBB = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}}`

`Out [134] = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}}`

`In [135] := ETB = B`

`Out [135] = {{1, 0, -1}, {2, 1, 1}, {-1, -1, 1}}`

`In [136] := BTE = Inverse [B]`

`Out [136] = {{2/3, 1/3, 1/3}, {-1, 0, -1}, {-1/3, 1/3, 1/3}}`

`In [137] := ShEE = ETB . ShBB . BTE`

`Out [137] = {{1/3, 2/3, 2/3}, {2/3, 1/3, -2/3}, {2/3, -2/3, 1/3}}`

`In [138] := MatrixForm [ShEE]`

$$\text{Out}[138] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Nun lösen wir das Beispiel 9.21.

**In[139] := B = Transpose[{ {2, 5}, {5, -2} }]**

**Out[139] = { {2, 5}, {5, -2} }**

**In[140] := ShBB = { {1, 0}, {0, -1} }**

**Out[140] = { {1, 0}, {0, -1} }**

**In[141] := ETB = B**

**Out[141] = { {2, 5}, {5, -2} }**

**In[142] := BTE = Inverse[B]**

**Out[142] = { {  $\frac{2}{29}$ ,  $\frac{5}{29}$  }, {  $\frac{5}{29}$ ,  $-\frac{2}{29}$  } }**

**In[143] := ShEE = ETB . ShBB . BTE**

**Out[143] = { {  $-\frac{21}{29}$ ,  $\frac{20}{29}$  }, {  $\frac{20}{29}$ ,  $\frac{21}{29}$  } }**

**In[144] := MatrixForm[ShEE]**

$$\text{Out}[144] = \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{21}{29} \end{pmatrix}$$

Schließlich lösen wir noch Beispiel 9.22

**In[145] := B = Transpose[ { -1/Sqrt[5] \* {2, 0, 1},  
1/Sqrt[45] \* {-2, 5, 4}, 1/3 \* {1, 2, -2} } ]**

**Out[145] = { {  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $-\frac{2}{3\sqrt{5}}$ ,  $\frac{1}{3}$  }, {  $0$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  }, {  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ ,  $-\frac{2}{3}$  } }**

**In[146] := c = Cos[ $\pi/3$ ];**

**s = Sin[ $\pi/3$ ];**

**ShBB = { {c, -s, 0}, {s, c, 0}, {0, 0, 1} }**

**Out[146] = { {  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $0$  }, {  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $0$  }, {  $0$ ,  $0$ ,  $1$  } }**

**In[147] := ETB = B**

**Out[147] = { {  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $-\frac{2}{3\sqrt{5}}$ ,  $\frac{1}{3}$  }, {  $0$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  }, {  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ ,  $-\frac{2}{3}$  } }**

**In[148] := BTE = Inverse[B]**

**Out[148] = { {  $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $0$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$  }, {  $-\frac{2}{3\sqrt{5}}$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\frac{4}{3\sqrt{5}}$  }, {  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{2}{3}$  } }**

In [149] := **ShEE = Simplify [ETB.ShBB.BTE]**

$$\text{Out [149]} = \left\{ \left\{ \frac{5}{9}, \frac{1}{9} + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{9} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{13}{18}, \frac{1}{18} (-4 - 3\sqrt{3}) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{1}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{18} (-4 + 3\sqrt{3}), \frac{13}{18} \right\} \right\}$$

In [150] := **MatrixForm [N[ShEE, 6]]**

$$\text{Out [150]} = \begin{pmatrix} 0.555556 & 0.688461 & 0.466239 \\ -0.466239 & 0.722222 & -0.510897 \\ -0.688461 & 0.0664529 & 0.722222 \end{pmatrix}$$

### ÜBUNGSAUFGABEN 9.30.

- (1) Finden Sie eine Basis  $B$ , bezüglich der die Spiegelung  $\delta$  an der Ebene  $x + y + z = 0$  die Abbildungsmatrix

$$S_\delta(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat.

- (2) Bestimmen Sie eine geeignete Basis  $B$  des  $\mathbb{R}^2$ , für die die Abbildungsmatrix der Spiegelung  $s$  an der Geraden  $g: 7x - 4y$  folgende Form besitzt:

$$S_s(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (3) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit  $\sigma$  jene Spiegelung, die jeden Punkt der Ebene  $\mathbb{R}^2$  an der Geraden  $-3x + 4y = 0$  spiegelt.

- (a) Bestimmen Sie eine Basis  $B$  des  $\mathbb{R}^2$ , sodass für die Abbildungsmatrix  $S_\sigma(B, B)$  der Spiegelung  $\sigma$  bezüglich der Basis  $B$  folgende Gleichung gilt.

$$S_\sigma(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix  $S_\sigma(E, E)$  der Spiegelung  $\sigma$  bezüglich der kanonischen Basis  $E$ .

- (c) Wo landet der Punkt  $(a, b)$  nach dieser Spiegelung  $\sigma$ ?

- (4) Sei  $h$  die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene  $e: x + 2y + 2z = 0$  spiegelt.

- (a) Berechnen Sie  $h(v)$  für  $v \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ .

- (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $S_h(B, B)$  für die Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (5) Wir betrachten die Abbildung  $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die jeden Punkt an der  $y$ -Achse spiegelt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $S_\sigma(E, E)$  dieser Abbildung bezüglich der kanonischen Basis  $E$ . Testen Sie Ihre Abbildungsmatrix, indem Sie damit das Spiegelbild von  $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  ausrechnen.

- (6) Geben Sie die Darstellungsmatrix für die Spiegelung an der Ebene  $2x - y + z = 0$  bezüglich der kanonischen Basis  $E$  an. (Sie brauchen die auftretenden inversen Matrizen nicht zu berechnen.)

- (7) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene)

- (a) Wir bezeichnen mit  $\sigma$  jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden

$$x + y = 0$$

spiegelt. Wo landet der Punkt  $(a, b)$  nach dieser Spiegelung  $\sigma$ ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.

- (b) Finden Sie mithilfe einer Skizze, wo der Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  landet, und überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Rechnung anhand der Skizze.

- (8) Sei  $h$  die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene  $e: x + 2y + 2z = 0$  spiegelt. Wir suchen in diesem Beispiel  $S_h(E, E)$ , wobei  $E$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist. Gehen Sie dazu so vor:

- (a) Bestimmen Sie  $S_{\text{id}}(E, B)$ . Dabei ist  $\text{id}$  die identische Abbildung.  $S_{\text{id}}(E, B)$  ist also eine Basistransformationsmatrix, und erfüllt die Eigenschaft  $(v)_B = S_{\text{id}}(E, B) \cdot (v)_E$  für alle  $v \in \mathbb{R}^3$ .

- (b) Bestimmen Sie  $S_{\text{id}}(B, E)$ .

- (c) Bauen Sie aus diesen beiden Matrizen und  $S_h(B, B)$  die Matrix  $S_h(E, E)$  zusammen.

- (9) (Spiegelung an einer Ebene im Raum) Wo landet der Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  nach der Spiegelung  $\sigma$  an der Ebene

$$-2x - y + z = 0 ?$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung!

- (10) (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit  $\sigma$  jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden  $12x + 5y = 0$  spiegelt. Wo landet der Punkt  $(a, b)$  nach dieser Spiegelung  $\sigma$ ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.
- (11) Wir bezeichnen mit  $\sigma$  jene Spiegelung, die jeden Punkt an der Geraden  $15x - 8y = 0$  spiegelt. Wo landet der Punkt  $(a, b)$  nach dieser Spiegelung  $\sigma$ ? Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis.
- (12) Geben Sie die Darstellungsmatrix für die Spiegelung an der Geraden  $x - 2y = 0$  bezüglich der kanonischen Basis  $E$  an.
- (13) Wo landet der Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  nach der Drehung  $\delta$  um  $90^\circ$  um die Gerade

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis! Wir drehen dabei *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  nach  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  schaut.

- (14) (Drehung um eine Gerade im Raum) Wo landet der Punkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  nach der Drehung  $\delta$  um  $90^\circ$  um die Gerade  $g$ , die durch

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist? Dabei drehen wir *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von  $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  schaut. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis!



## Literaturverzeichnis

[Halmos, 1976] Halmos, P. R. (1976). *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. Vierte Auflage, Aus dem Englischen übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 6.



## ANHANG A

### Programme, die vorrechnen

Die Mathematica-Files `GaussDemo6.m` und `RowRed9.m` enthalten Mathematica-Funktionen, die folgende Probleme mit Zwischenschritten vorrechnen:

- Lösen eines linearen Gleichungssystems (`Gauss[A, b]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonForm[A]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonNormalForm[A]`).
- Bestimmen der Determinante einer Matrix (`DeterminantenDemo[A]`).

Die Programme können von Mathematica aus mit `<< GaussDemo6.m` und `<< RowRed9.m` geladen werden.

Sie sind auf <http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/MathInf/vlws05/MathematicaProgramme/> erhältlich und werden den Studierenden ausschließlich für die Nutzung im Rahmen des Kurses “Lineare Algebra” zur Verfügung gestellt.