**Unterlagen zur Vorlesung**

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2009/10

Erhard Aichinger
Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz



Version 28. September 2009

Adresse:
Univ.-Doz. Dr. Erhard Aichinger
Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz
4040 Linz
e-mail: `erhard.aichinger@jku.at`
Version 28.9.2009

# Inhaltsverzeichnis

# Teil 1

# Vektoren und Matrizen

KAPITEL 1

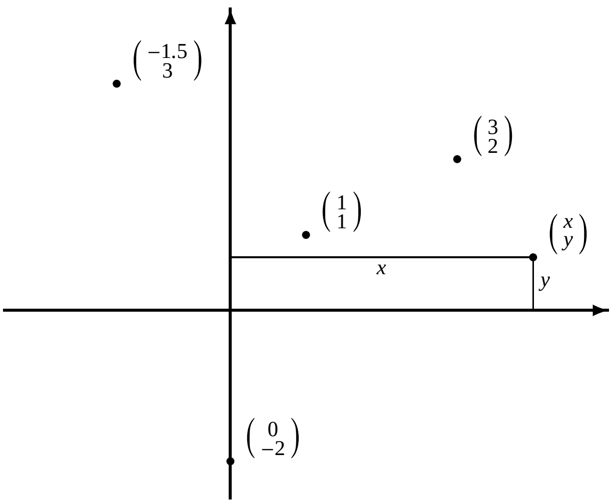
# Geometrie in der Ebene und im Raum

## 1. Koordinaten

Wir beschreiben – nach einer Idee von René Descartes (1596 – 1650) – jeden Punkt in der Ebene durch ein Paar reeller Zahlen. Die Menge der Paare reeller Zahlen kürzen wir mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ ab.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{\binom{x}{y} \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}.$$

Für das Paar $\binom{x}{y}$ schreiben wir auch $(x, y)$. Aus der folgenden Skizze ist ersichtlich, wie wir jeden Punkt durch ein Zahlenpaar (seine *kartesischen Koordinaten*) beschreiben.

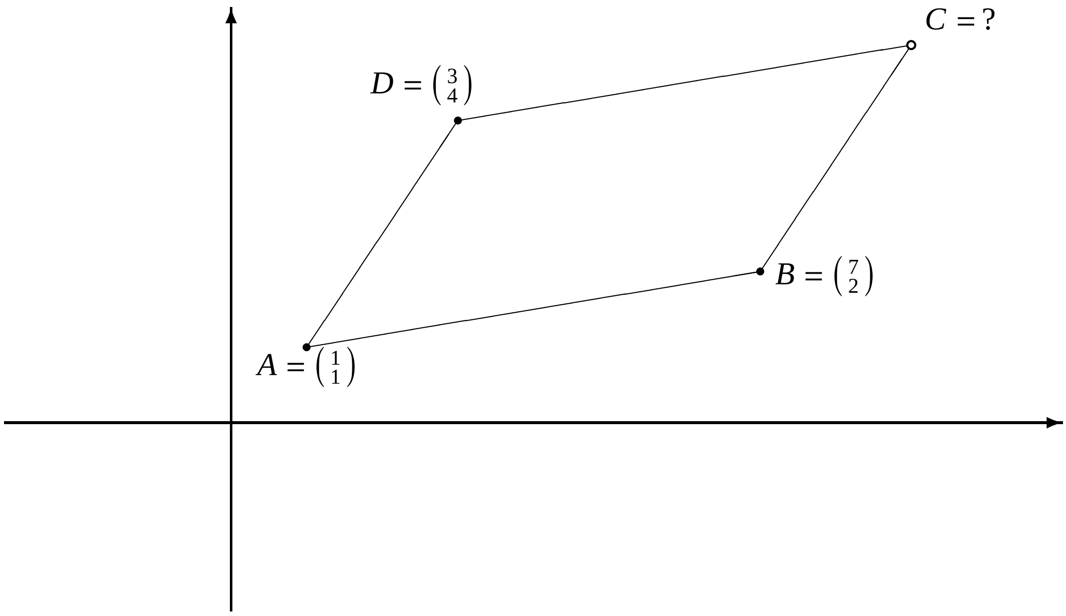



## 2. Vektoren

Wo liegt der Punkt $C$ im Parallelogramm ABCD, dessen Punkte $A$, $B$ und $D$ durch

$$A = \binom{1}{1},\ B = \binom{7}{2},\ D = \binom{3}{4}$$

gegeben sind?




Um von $A$ nach $B$ zu kommen, müssen wir 6 nach rechts und 1 nach oben gehen.

$$\vec{AB} = \binom{7}{2} - \binom{1}{1} = \binom{6}{1}.$$

Wenn wir von $D$ starten und um 6 nach rechts und 1 nach oben gehen, landen wir bei $C$.

$$C = D + \vec{AB} = \binom{3}{4} + \binom{6}{1} = \binom{9}{5}.$$

Wir bemerken, dass wir ein Paar reeller Zahlen, wie etwa $\binom{6}{1}$, verwenden, um zwei verschiedene Dinge zu beschreiben:

- Den Punkt, der um 6 Längeneinheiten rechts und um 1 Längeneinheit über dem Punkt $\binom{0}{0}$ liegt.
- Den Weg (*Vektor*) von $\binom{1}{1}$ nach $\binom{7}{2}$.

In Mathematica werden Vektoren als Listen dargestellt.

```
In[1]:= a = {1, 1};

In[2]:= b = {7, 2};

In[3]:= d = {3, 4};

In[4]:= ab = b - a
Out[4]= {6, 1}

In[5]:= c = d + ab
Out[5]= {9, 5}
```

## 3. Die Länge eines Vektors

Wir lösen folgendes Beispiel:

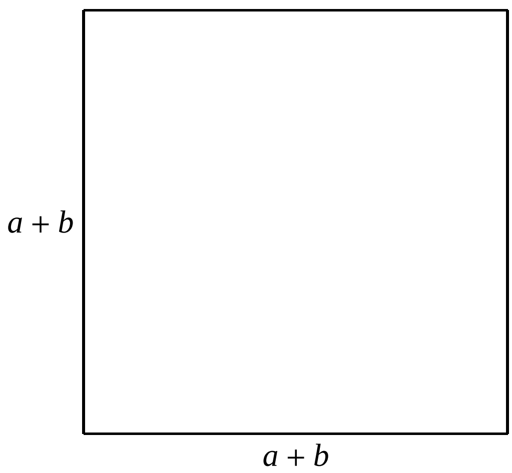
> Herr $A$ geht von $\binom{3}{2}$ aus 1 Einheit in Richtung Südosten. Wo landet er?

"Richtung Südosten" heißt "in Richtung $\binom{1}{-1}$". Allerdings hat $\binom{1}{-1}$ die Länge $\sqrt{2} \approx 1.41421$. Daher hat $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \binom{1}{-1}$ die Länge 1 und zeigt auch in Richtung Südosten. Herr $A$ landet also im Punkt $Z$, den wir uns mit

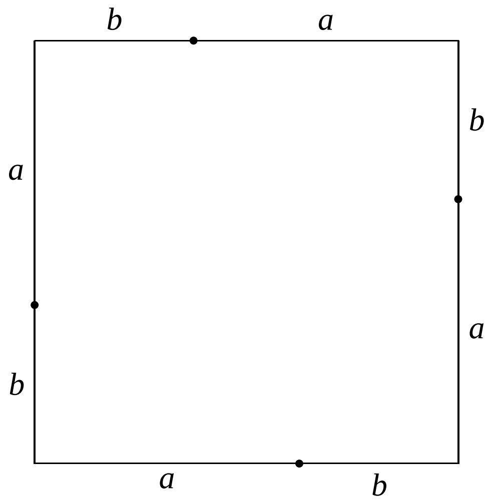
$$Z = \binom{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \binom{1}{-1} \approx \binom{3.7}{1.3}$$

ausrechnen.

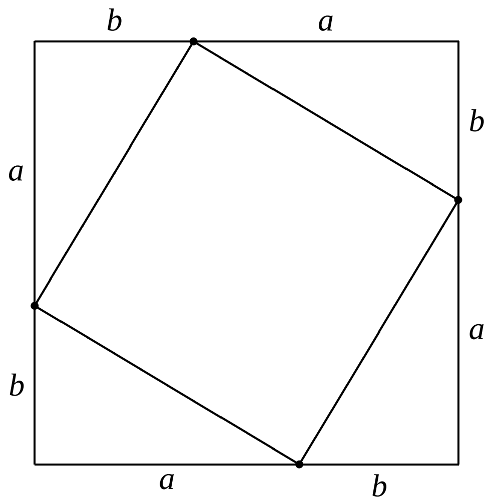
Wir überlegen uns jetzt, wie lange der Vektor $\binom{a}{b}$ ist. Das heißt, wir wollen wissen, wie lange in einem Dreieck, in dem die Seiten mit den Längen $a$ und $b$ einen rechten Winkel einschließen, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist. Vergessen wir kurz unsere klassische Bildung, und zeichnen wir ein Quadrat mit Seitenlänge $a + b$.



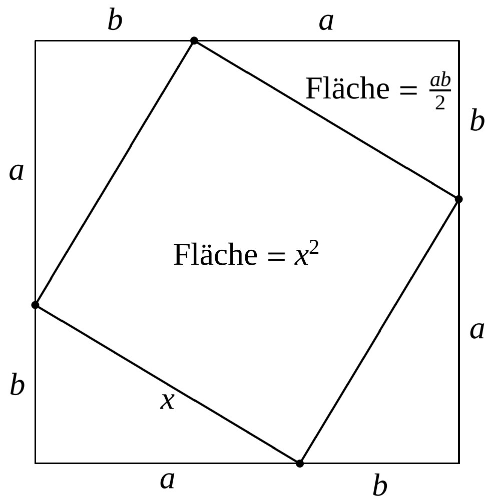

Jetzt unterteilen wir jede der vier Quadratseiten in ein Stück der Länge $a$ und ein Stück der Länge $b$.




Wir verbinden die vier Teilungspunkte.




Das innere jetzt eingezeichnete Viereck ist ein Quadrat. Das kann man so begründen: wenn man die ganze Zeichnung um $90^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn dreht, kommt das innere Viereck auf sich selbst zu liegen: daher sind alle vier Winkel des inneren Vierecks gleich groß. In jedem Dreieck ist die Winkelsumme $180^\circ$, und daher ist in jedem Viereck die Winkelsumme $360^\circ$. Also ist jeder Winkel des inneren Vierecks gleich $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Sei $x$ die Länge des Vektors $\binom{a}{b}$. Dann hat das innere Viereck die Fläche $x^2$. Jedes der vier rechtwinkeligen Dreiecke hat die Fläche $\frac{a\,b}{2}$.




Das innere Viereck und die vier rechtwinkeligen Dreiecke ergeben zusammen die Fläche des großen Quadrats mit der Seitenlänge $a + b$, also gilt

$$x^2 + 4\frac{a\,b}{2} = (a + b)^2.$$

Das heißt

$$x^2 + 2\,a\,b = a^2 + 2\,a\,b + b^2,$$

also

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Mit diesem Zusammenhang, dem Satz des Pythagoras (Pythagoras von Samos, 6. Jh. v. Chr), können wir die Länge $x$ des Vektors $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ ausrechnen.

Wir kürzen die Länge des Vektors $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ mit $\|\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\|$ ab. Es gilt dann

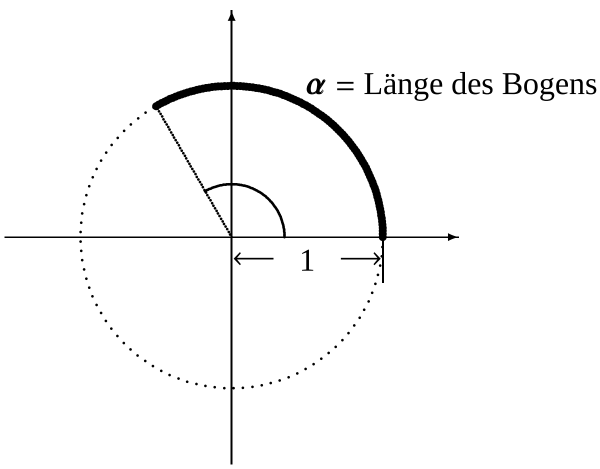
$$\|\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## 4. Trigonometrie

In der *Trigonometrie* geht es darum, wie man – rechnerisch – aus den gegebenen Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks die restlichen Seitenlängen und Winkel bestimmen kann. Wenn man etwa von einem Dreieck die Längen der drei Seiten kennt, dann ist das Dreieck dadurch eindeutig bestimmt: die Winkel des Dreiecks sind also durch die Längen der drei Seiten festgelegt. (Wie konstruiert man ein Dreieck, das durch die drei Seitenlängen gegeben ist?) Ebenso ist ein Dreick dadurch bestimmt, dass man eine Seite und die beiden daran anliegenden Winkel kennt. (Wie konstruiert man dieses Dreieck?) Uns geht es jetzt darum, die fehlenden Seitenlängen und Winkel auszurechnen. Dabei geht man so vor:

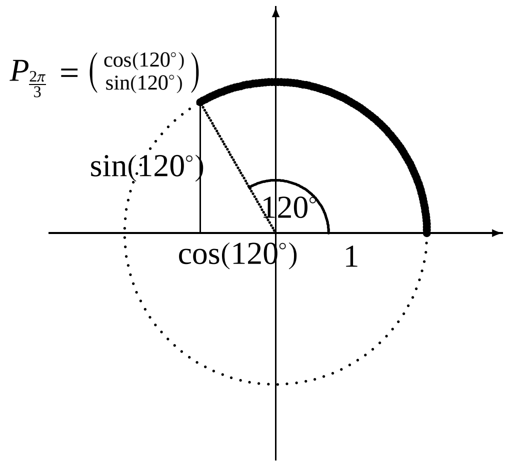
(1) Man tabelliert den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen und den Winkeln für rechtwinkelige Dreiecke. Dazu braucht man die *Winkelfunktionen* sin (Sinus) und cos (Cosinus).
(2) Man baut sich alle anderen Dreiecke aus rechtwinkeligen Dreiecken zusammen. Da dieses Zusammenbauen aber immer gleich funktioniert, macht man es einmal für alle Dreiecke. Man gewinnt so zwei Zusammenhänge zwischen Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks: den *Cosinussatz* und den *Sinussatz*. Diese beiden Sätze reichen aus, um alle trigonometrischen Probleme zu lösen.

**4.1. Winkel.** Winkel misst man nicht nur in Grad ($\circ$), sondern auch in *Radiant* (rad). Dabei wird der Winkel durch die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis, dem Kreis mit Radius 1, angegeben.




Dabei entsprechen 180° dem Winkel $\pi$ rad. Demzufolge ist $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad , und 1 rad $\approx 57.2958^\circ$.

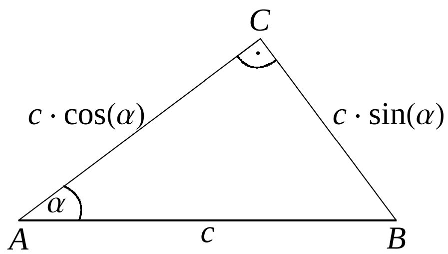
**4.2. Winkelfunktionen.**




Gegeben ist ein Winkel $x$. Der auf dem Kreis mit Mittelpunkt $\binom{0}{0}$ und Radius 1 liegende Punkt $P_x$ hat dann die Koordinaten $\binom{\cos(x)}{\sin(x)}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für jeden Winkel $x$:

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

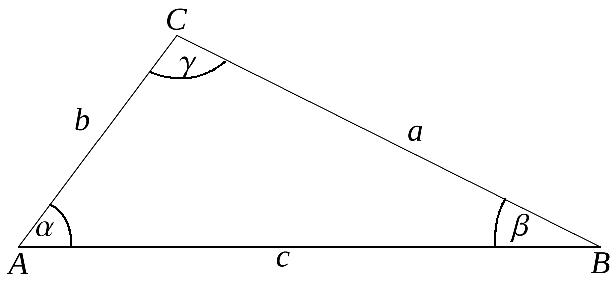
In einem rechtwinkeligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite auch *Hypotenuse*, die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*.




ÜBUNGSAUFGABEN 1.1.

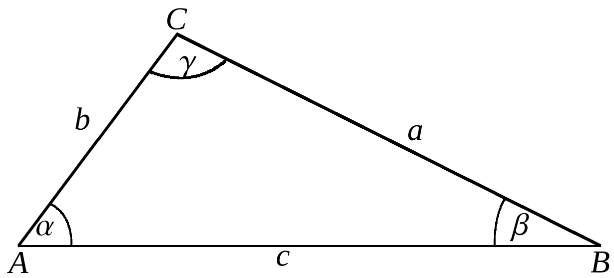
(1) Ein Kletterer kann Wände mit einer Neigung von maximal 65° besteigen. Schafft er eine Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche von 784 $m^2$ und einer Höhe von 40 m?

**4.3. Zusammenhang zwischen Seitenlängen und Winkeln eines Dreiecks.** Wir sagen, dass drei Punkte ein *Dreieck* bilden, wenn sie nicht alle drei auf einer Geraden liegen. In einem Dreieck bezeichnet man oft die Längen der Seiten mit $a, b, c$, und den der Seite mit Länge $a$ gegenüber liegenden Winkel mit $\alpha$, den der Seite mit Länge $b$ gegenüber liegenden Winkel mit $\beta$, und den der Seite mit Länge $c$ gegenüber liegenden Winkel mit $\gamma$. Die Seiten sind üblicherweise *gegen den Uhrzeigersinn* mit $a, b, c$ beschriftet.




Der Cosinussatz löst folgendes Problem:

- Gegeben: Seitenlängen $a, b$ eines Dreiecks und der eingeschlossene Winkel $\gamma$.
- Gesucht: Die fehlende Seitenlänge $c$.




Wir betrachten zunächst den Fall $\gamma \leq 90^\circ$, $\alpha \leq 90^\circ$. Wir zeichnen in ein solches Dreieck die Höhe auf $b$ und erhalten aus dem Satz des Pythagoras:

$$c^2 = (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2,$$

also

$$\begin{aligned}
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2(\cos(\gamma))^2 + a^2(\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2\,((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2) \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + 1\,a^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Für den Fall $\gamma \leq 90^\circ$ und $\alpha > 90^\circ$ zeichnen wir die Höhe auf $a$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
c^2 &= (a - b\cos(\gamma))^2 + (b\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= a^2 - 2\,b\,a\cos(\gamma) + b^2(\cos(\gamma))^2 + b^2(\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= a^2 - 2\,b\,a\cos(\gamma) + b^2\,((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2) \\
c^2 &= a^2 - 2\,b\,a\ \cos(\gamma) + 1\,b^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\ \cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir den Fall $\gamma > 90^\circ$. Wir zeichnen in ein solches Dreieck die Höhe auf $b$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
c^2 &= (b + a\cos(180^\circ - \gamma))^2 + (a\sin(180^\circ - \gamma))^2 \\
c^2 &= (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2(\cos(\gamma))^2 + a^2(\sin(\gamma))^2 \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + a^2\,((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2) \\
c^2 &= b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) + 1\,a^2 \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

SATZ 1.2 (Cosinussatz). *Wir bezeichnen die Längen der Seiten eines Dreiecks mit $a$, $b$, $c$, und wir bezeichnen den der Seite mit Länge $c$ gegenüber liegenden Winkel mit $\gamma$. Dann gilt*

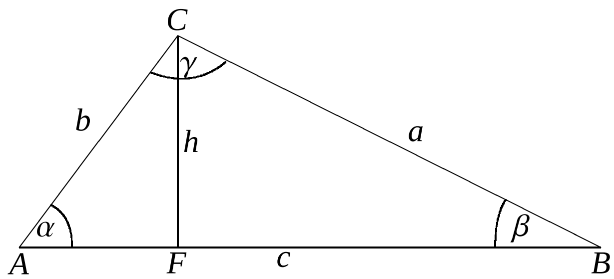
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma).$$

Man findet mit dem Cosinussatz $\gamma$, wenn $a, b$ und $c$ gegeben sind. Zu jedem $y \in [-1, 1]$ gibt es genau ein $x \in [0, \pi]$, sodass $\cos(x) = y$.

### 4.4. Der Sinussatz.

Der Sinussatz löst folgendes Problem:

- Gegeben: $\alpha, \beta, a$.
- Gesucht: $b$.




Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck $AFC$ und erhalten

$$h = b\sin(\alpha).$$

Mit dem Dreieck $FBC$ finden wir

$$h = a\sin(\beta).$$

Es gilt also $b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$. Sowohl $\sin(\alpha)$ also auch $\sin(\beta)$ sind ungleich 0, da in einem Dreieck kein Winkel $0^\circ$ oder $180^\circ$ sein kann. (Wir haben Dreiecke so definiert, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.) Es gilt also

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$

Wenn man die gleiche Überlegung mit der Höhe auf $a$ macht, erhält man $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

SATZ 1.3 (Sinussatz). *Wir bezeichnen die Längen der Seiten eines Dreiecks mit $a$, $b$, $c$, den der Seite mit Länge $a$ gegenüber liegenden Winkel mit $\alpha$, den der Seite mit Länge $b$ gegenüber liegenden Winkel mit $\beta$, und den der Seite mit Länge $c$ gegenüber liegenden Winkel mit $\gamma$. Sei $d$ der Durchmesser des Umkreises des Dreiecks. Dann gilt:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = d.$$

Wir überlegen uns jetzt, wie man Sinus- und Cosinussatz benutzen kann, um die fehlenden Winkel und Seitenlängen eines Dreiecks zu berechnen. In den Dreiecken der folgenden Beispiele bezeichnen wir die Längen der Seiten mit $a$, $b$, $c$, und wir bezeichnen den der Seite mit Länge $a$ gegenüber liegenden Winkel mit $\alpha$, den der Seite mit Länge $b$ gegenüber liegenden Winkel mit $\beta$, und den der Seite mit Länge $c$ gegenüber liegenden Winkel mit $\gamma$. Die Seiten seien dabei *gegen den Uhrzeigersinn* mit $a$, $b$, $c$ beschriftet.

(1) *Es sind die Seitenlängen $a$, $b$, $c$ gegeben:* Es gibt so ein Dreieck, wenn $a < b + c$, $b < a + c$, und $c < a + b$. Der Winkel $\alpha$ ist dann durch

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)$$

eindeutig bestimmt.

(2) *Es sind eine Seitenlänge und zwei Winkel gegeben:* Da die Winkelsumme $180^\circ$ ist, kennt man tatsächlich alle drei Winkel. Sind also $c$, $\alpha$, und $\beta$ gegeben, so gibt es so ein Dreieck, wenn $\alpha + \beta < \pi$. Man berechnet $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, und dann $a$ und $b$ mithilfe des Sinussatzes.

(3) *Es sind zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel gegeben:* Es sind also zum Beispiel $b$, $c$, und $\alpha$ gegeben. Wenn $b$ und $c$ positive reelle Zahlen sind, und $0 < \alpha < \pi$ gilt, so gibt es sicher ein solches Dreieck. Man berechnet dann $a$ mithilfe des Cosinussatzes; dann kennt man alle drei Seitenlängen und kann mit dem Cosinussatz die verbleibenden Winkel ausrechnen.

(4) *Es sind zwei Seitenlängen gegeben, und ein Winkel, der nicht der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel ist:* Es sind also zum Beispiel $c$, $\alpha$ und $a$ gegeben. In diesem Fall kann es sein, dass es gar kein, genau ein oder genau zwei Dreiecke mit dem vorgegebenen $c$, $\alpha$ und $a$ gibt. Es gibt mehrere Fälle:

   (a) *Es gilt $\alpha < 90^\circ$:*

      (i) *Es gilt $a \geq c$:* Es gibt genau ein Dreieck. Wir erhalten $b$ als die einzige positive Lösung von

$$c^2 + x^2 - 2\,c\,x\cos(\alpha) = a^2.$$

      Es gilt also

$$b = c\cos(\alpha) + \sqrt{(c\cos(\alpha))^2 + a^2 - c^2}.$$

(ii) *Es gilt* $c\sin(\alpha) < a < c$*:* Es gibt genau zwei Dreiecke. Wir erhalten die beiden Möglichkeiten für $b$ als die Lösungen der Gleichung

$$c^2 + x^2 - 2\,c\,x\cos(\alpha) = a^2,$$

also

$$b_{1,2} = c\cos(\alpha) \pm \sqrt{a^2 - (c\sin(\alpha))^2}.$$

(iii) *Es gilt* $a = c\sin(\alpha)$*:* Es gibt genau ein Dreieck. Wir erhalten $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $b = c\cos(\alpha)$.

(iv) *Es gilt* $a < c\sin(\alpha)$*:* Es gibt kein Dreieck.

(b) *Es gilt* $\alpha = 90^\circ$*:*

(i) *Es gilt* $a > c$*:* Es gibt genau ein Dreieck, und

$$b^2 = a^2 - c^2$$

nach dem Satz des Pythagoras.

(ii) *Es gilt* $a \leq c$*:* Es gibt kein Dreieck.

(c) *Es gilt* $\alpha > 90^\circ$*:*

(i) *Es gilt* $a > c$*:* Es gibt ein Dreieck. Die Länge $b$ ist die einzige positive Lösung von

$$c^2 + x^2 - 2\,c\,x\cos(\alpha) = a^2,$$

also

$$b = c\cos(\alpha) + \sqrt{(c\cos(\alpha))^2 + a^2 - c^2}.$$

(ii) *Es gilt* $a \leq c$*:* Es gibt kein Dreieck. Tückischerweise kann die Gleichung

$$c^2 + x^2 - 2\,c\,x\cos(\alpha) = a^2$$

trotzdem positive Lösungen haben.

## ÜBUNGSAUFGABEN 1.4.

Wir bezeichnen die Längen der Seiten eines Dreiecks mit $a$, $b$, $c$, und wir bezeichnen den der Seite mit Länge $a$ gegenüber liegenden Winkel mit $\alpha$, den der Seite mit Länge $b$ gegenüber liegenden Winkel mit $\beta$, und den der Seite mit Länge $c$ gegenüber liegenden Winkel mit $\gamma$. (Die Seiten seien dabei *gegen den Uhrzeigersinn* mit $a$, $b$, $c$ beschriftet.)

(1) Berechnen Sie $\sin(\gamma)$ für ein Dreieck mit $c = 10$, $b = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $\beta = 30^\circ$. Das Dreieck ist mit diesen drei Bestimmungsstücken $c, b, \beta$ noch nicht eindeutig festgelegt. Warum nicht?

(2) Wie groß kann $b$ in einem Dreieck mit $\alpha = 45^\circ$, $c = 1$, $a = \frac{2}{\sqrt{6}}$ sein? (Gibt es mehr als eine Lösung?)

(3) Geben Sie eine Wahl von $a$ an, sodass es genau ein Dreieck mit den Bestimmungsstücken $\alpha = 45^\circ$, $c = 1$, und Ihrem gewählten $a$ gibt!

(4) Von einem Dreieck $ABC$ haben Sie folgende Information: $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, der Winkel $\alpha$ zwischen $AB$ und $AC$ ist $30^\circ$, $\overline{BC} = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm.
   (a) Stellen Sie diese Daten in einer Skizze dar.
   (b) Welchen Winkel schließen $CB$ und $CA$ ein? Gibt es mehr als eine Lösung?

Berechnen Sie in den folgenden Beispielen jeweils die nicht angegebenen Seitenlängen und Winkel.

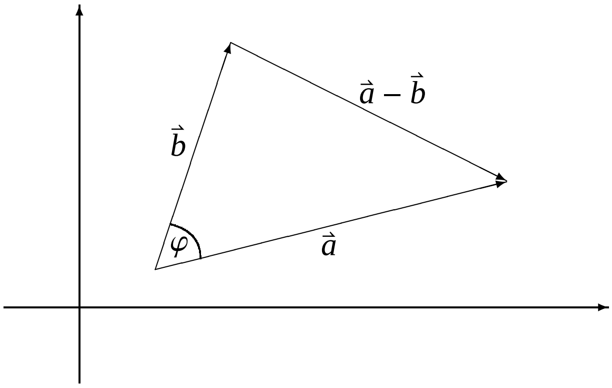
(5) (a) $c = 4$, $b = 5$, $a = 3$.
   (b) $c = 4$, $b = 5$, $a = 10$.

(6) (a) $c = 5$, $b = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
   (b) Gibt es für jede Wahl von $c > 0$, $b > 0$, $\alpha$ mit $0 < \alpha < \pi$ ein Dreieck mit den gewählten Bestimmungsstücken?

(7) (a) $c = 5, b = 10, \beta = \frac{\pi}{6}$.
(b) $c = 5, b = 3, \beta = \frac{\pi}{6}$.
(8) (a) $c = 5, b = \frac{5}{2}, \beta = \frac{\pi}{6}$.
(b) $c = 5, b = 2, \beta = \frac{\pi}{6}$.
(9) (a) $c = 5, b = 3, \beta = \frac{5\pi}{6}$.
(b) $c = 5, b = 10, \beta = \frac{5\pi}{6}$.
(c) $c = 4, b = 5, \beta = \frac{\pi}{2}$.
(10) Fassen Sie Ihre Beobachtungen aus den letzten Beispielen zusammen: Unter welchen Voraussetzungen an $c$, $b$, $\beta$ gibt es
(a) gar kein Dreieck
(b) genau ein Dreieck
(c) genau zwei Dreiecke
(d) mehr als zwei Dreiecke
mit den Bestimmungsstücken $c > 0, b > 0, \beta \in ]0, \pi[$?
(11) (a) $c = 5, \alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{8}$.
(b) $c = 5, \alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}$.
(c) $c = 5, \alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}$.
(12) Fassen Sie Ihre Beobachtung aus dem letzten Beispiel zusammen: Unter welchen Voraussetzungen an $c, \alpha, \beta$ gibt es
(a) gar kein Dreieck
(b) genau ein Dreieck
(c) genau zwei Dreiecke
(d) mehr als zwei Dreiecke
mit den Bestimmungsstücken $c, \alpha, \beta$?
(13) Bestimmen Sie $b$ für alle Dreiecke mit $c = 4$, $\alpha = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$.
(14) Bestimmen Sie ein $a$, sodass es kein Dreieck mit $c = 4$, $\alpha = 60^\circ$ und Ihrem gewählten $a$ gibt.
(15) Bestimmen Sie ein $a$, sodass es *genau ein* Dreieck mit $c = 4$, $\alpha = 60^\circ$ und Ihrem gewählten $a$ gibt.
(16) Bestimmen Sie $c$ für alle Dreiecke mit $a = 2, \beta = 45^\circ$, $b = \frac{4}{\sqrt{6}}$.
(17) Bestimmen Sie ein $b$, sodass es kein Dreieck mit $a = 2, \beta = 45^\circ$ und Ihrem gewählten $b$ gibt.
(18) Bestimmen Sie ein $b$, sodass es *genau ein* Dreieck mit $a = 2, \beta = 45^\circ$ und Ihrem gewählten $b$ gibt.
(19) Sie möchten die Entfernung eines Punktes $B$ an einem Ufer eines Flusses zu einem Punkt $C$ auf der anderen Seite des Flusses bestimmen. Dazu gehen Sie folgendermaßen vor: Sie messen an Ihrem Flussufer die Strecke von $B$ zu einem weiteren Punkt $A$ ab. Diese Strecke ist 500 m lang. Der Winkel zwischen $BC$ und $BA$ ist $60^\circ$, der Winkel zwischen $AB$ und $AC$ ist $30^\circ$.
(a) Stellen Sie diese Daten in einer Skizze dar.
(b) Wie lang ist die Strecke $BC$?
(c) Um die Breite des Flusses zu bestimmen, wollen Sie wissen, wie weit $C$ von der Strecke $AB$ entfernt liegt. Bestimmen Sie dazu den Normalabstand von $C$ auf die Gerade durch $A$ und $B$.
(20) Sie glauben dem italienischen Tourismusverband nicht und wollen selbst herausfinden, wie schief der Turm von Pisa ist. Dazu entfernen Sie sich in Neigerichtung des Turms 50 Meter vom Fußpunkt des Turms und blicken (vom Boden aus, damit Sie es später beim Rechnen einfacher haben) zur Turmspitze, wleche nun unter einem Winkel $\alpha$ erscheint. Sie stellen fest, dass $\alpha$ genau $47^\circ 12' 53''$ beträgt, und dass der Turm 45 m lang ist. Um wieviel Grad ist der Turm gegen die Vertikale geneigt?
(21) Sie möchten die Entfernung eines Punktes $A$ an einem Ufer eines Flusses zu einem Punkt $B$ auf der anderen Seite bestimmen. Dazu können Sie folgendermaßen vorgehen: Messen Sie an Ihrem Flussufer die Strecke $A$ zu einem Punkt $C$ ab, und bestimmen Sie dann mit Hilfe eines Kompasses den Winkel $\alpha$ zwischen der Strecke $AB$ und $AC$, sowie den Winkel $\gamma$ zwischen $AC$ und $CB$. Was ergibt sich für die Entfernung $AB$ bei $AC = 27.5$ m und $\alpha = 73^\circ$, $\gamma = 65^\circ$?
(22) Sie verlassen eine gerade Straße, die die beiden Orte A und B verbindet, 20 km bevor Sie B erreichen und gehen geradeaus, bis es Ihnen nach 10 km keinen Spaß mehr macht. Dann drehen Sie sich um $30^o$ nach rechts und erblicken nun den Ort B gerade vor sich. Wie weit müssen Sie jetzt noch wandern, um nach B zu gelangen, wenn Sie jetzt den geraden Weg nach B einschagen?

## 5. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Wir berechnen den Winkel, den die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ miteinander einschließen. Dazu nehmen wir an, dass keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist.




Für den eingeschlossenen Winkel $\varphi$ gilt nach dem Cosinussatz:

$$\|b - a\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|a\|\,\|b\|\cos(\varphi).$$

Diese Formel können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned}
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= -(\|\vec{b}-\vec{a}\|^2) + \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\\
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= -((b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2) + (a_1^2+a_2^2) + (b_1^2+b_2^2)\\
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= -(b_1^2 - 2\,a_1\,b_1 + a_1^2) - (b_2^2 - 2\,a_2\,b_2 + a_2^2) + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2\\
2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= 2\,a_1\,b_1 + 2\,a_2\,b_2\\
\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi) &= a_1\,b_1 + a_2\,b_2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1\,b_1 + a_2\,b_2}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

Die Zahl $a_1\,b_1 + a_2\,b_2$ bezeichnet man als das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und man kürzt es mit $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ ab.

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\rangle = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2.$$

Die Winkelformel heißt jetzt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

Außerdem gilt für jeden Vektor $\vec{a}$

$$\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = (\|a\|)^2.$$

```
In[6]:= {3, 4}.{-5, 2}
Out[6]= -7

In[7]:= Laenge[v_] := Sqrt[v.v]

In[8]:= Laenge[{2, 3}]
Out[8]= √13
```

Unter Verwendung der Mathematica-Function `Norm` kann man diese Länge auch mit `Norm[{2,3}]` ausrechnen.

DEFINITION 1.5. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *sind aufeinander normal*, wenn $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

Zwei Vektoren sind also aufeinander normal, wenn einer von ihnen der Nullvektor ist, oder wenn sie einen rechten Winkel einschließen. Damit erhält man, dass (wenn $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$) der Vektor $\binom{a}{b}$ mit den Vektoren $\binom{b}{-a}$ und $\binom{-b}{a}$ einen rechten Winkel einschließt.

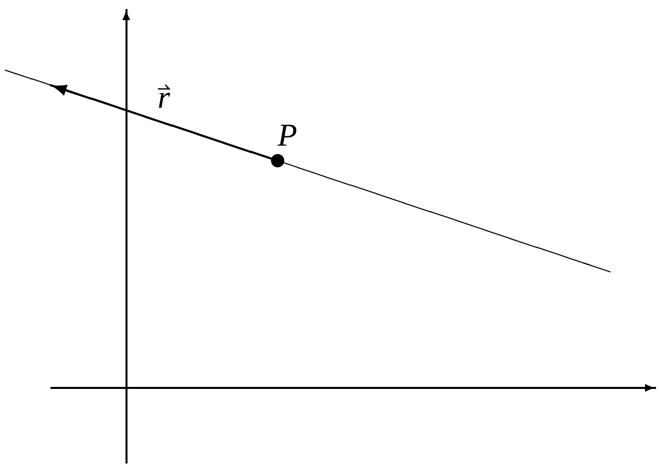
ÜBUNGSAUFGABEN 1.6.

(1) Von einem gleichschenkeligen Dreieck sind zwei Basiseckpunkte $\binom{-2}{3}$ und $\binom{4}{11}$ bekannt. Ergänzen Sie diese Punkte mit einer Spitze, sodaß das entstehende Dreieck die Höhe 5 besitzt. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es? (Sie brauchen nur eine wirklich auszurechnen.)
(2) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen $x$ und $y$ für $x = \binom{3}{2}$, $y = \binom{-6}{-4}$.
(3) Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen folgenden beiden Vektoren. Geben Sie die Ergebnisse in Grad und in Radiant an!
  (a) $a = \binom{3}{2}$, $b = \binom{-3}{2}$.
  (b) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{4}{-3}$.
  (c) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{6}{8}$.
  (d) $a = \binom{3}{4}$, $b = \binom{-9}{-12}$.
(4) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften erfüllt:
  (a) $\langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle$.
  (b) $\langle a+b, a-b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle$.
(5) Verwenden Sie das Skalarprodukt, um folgenden geometrischen Satz zu beweisen.
  In einem Parallelogramm mit Seitenlängen $a$, $b$, und Diagonalenlängen $e$, $f$ gilt:
$$2\,(a^2 + b^2) = e^2 + f^2.$$

## 6. Geraden in der Ebene

Wir überlegen uns, wie man Geraden in der Ebene beschreiben kann.

### 6.1. Geraden, die durch einen Punkt und eine Richtung gegeben sind.



$P = \binom{2}{3}$, $\vec{r} = \binom{-3}{1}$.

Die Gerade $g$ ist die Menge aller Punkte, die man erreicht, indem man von $P$ ein Stück in Richtung $\vec{r}$ geht.

$$g = \{P + \lambda \cdot \vec{r} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Lies: “g ist gleich der Menge aller Punkte $P + \lambda$ mal $\vec{r}$, wobei $\lambda$ eine reelle Zahl ist.” Mit den Zahlen für $P$ und $\vec{r}$:

$$g = \{\binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

oder, anders geschrieben,

$$g = \{\binom{2-3\lambda}{3+\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Man kann $g$ auch so schreiben:

$$g = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ es gibt } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \binom{x}{y} = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}\}.$$

Lies: “g ist gleich der Menge aller Punkte $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}$ hoch 2, für die es ein $\lambda$ in den reellen Zahlen gibt, sodass $\binom{x}{y}$ gleich $\binom{2}{3}$ + $\lambda$ mal $\binom{-3}{1}$ ist.” Diese Darstellung von $g$ durch *Punkt* und *Richtungsvektor* heißt *Parameterdarstellung der Geraden g.* Man schreibt oft kurz:

$$g : \binom{x}{y} = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$$

oder

$$g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}.$$

Wir überprüfen, ob der Punkt $\binom{-4}{5}$ auf der Geraden $g$ liegt. Er liegt auf $g$, falls es eine reelle Zahl $\lambda$ gibt, sodass $\binom{-4}{5}$ gleich $\binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$ ist. Wir suchen also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, das die Gleichungen

$$\begin{aligned} -4 &= 2 - 3\lambda \qquad \mathrm{I} \\ 5 &= 3 + 1\lambda \qquad \mathrm{II} \end{aligned}$$

erfüllt. Aus der Gleichung I erhalten wir $\lambda = 2$; da auch $5 = 3 + 1 \cdot 2$ gilt, ist $\lambda = 2$ eine Lösung des Gleichungssystems. Daher liegt der Punkt $\binom{-4}{5}$ auf $g$; wir schreiben dafür

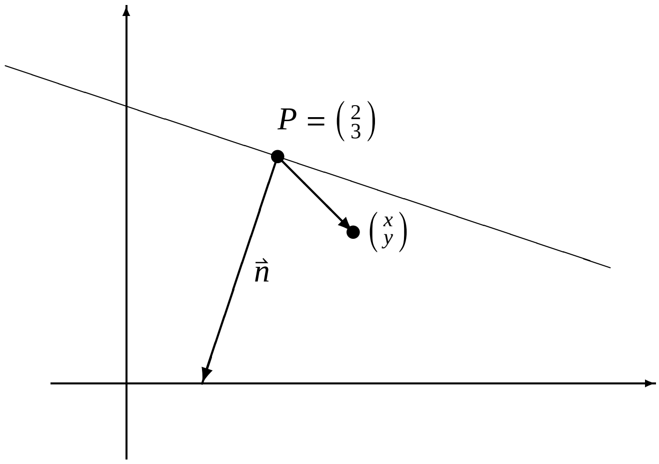
$$\binom{-4}{5} \in g.$$

**6.2. Geraden, die durch eine Gleichung gegeben sind.** Wir haben im letzten Beispiel überprüft, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Dabei war die Gerade in Parameterform gegeben. Zur Überprüfung war es notwendig, festzustellen, ob es einen Wert für den Parameter $\lambda$ gibt, der uns genau den getesteten Punkt liefert. Wir mussten also für jeden Punkt ein Gleichungssystem (mit zwei Gleichungen und einer Variable) lösen.

Wir testen nun wieder, ob $\binom{x}{y}$ auf der Geraden $g$ liegt, die durch

$$g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$$

gegeben ist.




Anstatt zu fragen, ob $\binom{x}{y}$ auf $g$ liegt, fragen wir, ob $\binom{x}{y} - \binom{2}{3}$ normal auf $\vec{n}$ ist. Das ist nämlich genau für die Punkte $\binom{x}{y}$ auf $g$ der Fall. Zunächst finden wir den Vektor $\vec{n}$. Auf den Vektor $\binom{a}{b}$ steht immer der Vektor $\binom{-b}{a}$ normal, denn das Skalarprodukt $\langle \binom{a}{b}, \binom{-b}{a} \rangle$ ergibt $-a\,b + a\,b = 0$. Also finden wir $\vec{n}$ durch

$$\vec{n} = \binom{-1}{-3}.$$

Nun überprüfen wir, ob $\binom{x}{y} - \binom{2}{3}$ normal auf $\binom{-1}{-3}$ steht. Das gilt genau dann, wenn

$$\langle \binom{x-2}{y-3}, \binom{-1}{-3} \rangle = 0.$$

Wir rechnen das Skalarprodukt aus und erhalten

$$-x - 3y + 11 = 0.$$

Ein Punkt $\binom{x}{y}$ liegt also genau dann auf der Geraden, wenn $-x - 3y + 11 = 0$ ist. Wir können also jetzt viel einfacher überprüfen, ob ein Punkt auf der Geraden $g$ liegt. Wir berechnen $-x - 3y + 11$. Ist das 0, so liegt der Punkt auf der Geraden, und sonst nicht. Außerdem können wir die Gerade jetzt kürzer angeben durch

$$g = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -x - 3y = -11\}$$

(lies: “g ist gleich der Menge aller $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}$ hoch 2, für die $-x - 3y$ gleich $-11$ ist.”) Das kürzt man auch zu

$$g : -x - 3y = -11$$

ab. $-x - 3y = -11$ heißt *Gleichung* der Geraden, diese Darstellung der Geraden *Gleichungsform* oder *implizite Darstellung* der Geraden.

### 6.3. Verwandlung zwischen Gleichungs- und Parameterform.

6.3.1. *Verwandlung von parametrisierter in implizite Darstellung.* Wir verwandeln $g : X = \binom{2}{3} + \lambda \cdot \binom{-3}{1}$ in $g : -x - 3y = -11$ so, wie das in obigem Beispiel erklärt worden ist.

6.3.2. *Verwandlung von impliziter in parametrisierte Form.* Wir verwandeln $g : 5x - 2y = 1$ in parametrisierte Form. Dazu setzen wir $y := t$ und rechnen uns aus diesem $y$ das $x$ aus. Wir erhalten $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}t$. Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $\binom{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}t}{t}$ ein Geradenpunkt. Die Gerade hat also die parametrisierte Darstellung

$$g : X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Darstellung derselben Geraden ist

$$g : X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

oder

$$g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ -55 \end{pmatrix}.$$

Spezialfall: Wir verwandeln $g : y = -1$ in Parameterform. Dazu setzen wir $x := t$, und rechnen uns dann das $y$ aus. Das ist aber immer $-1$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist also $\binom{t}{-1}$ ein Geradenpunkt. Die Gerade hat die parametrisierte Darstellung

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ÜBUNGSAUFGABEN 1.7.

(1) Geben Sie die Gerade durch die Punkte $\binom{3}{2}$ und $\binom{3}{-3}$ in Parameterform und in impliziter Form an!
(2) Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform (= Punkt-Richtungs-Form) folgender Geraden.
   (a) $3x + 4y = 17$.
   (b) $x = 1$.
   (c) $y = -4$.
(3) Bestimmen Sie eine Gleichung, deren Lösungsmenge die Gerade
$$X = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
ist.
(4) Bestimmen Sie die implizite Darstellung jener Geraden, die parallel zur Geraden $g$ mit
$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
sind und von dieser Abstand 10 haben.
(5) Ein Radfahrer startet im Punkt $\binom{2}{3}$ und fährt auf den Punkt $\binom{8}{0}$ zu. Ein Fußgänger startet im Punkt $\binom{4}{-3}$ und geht auf den Punkt $\binom{4}{10}$ zu. In welchem Punkt schneiden sich die Wege der beiden?
(6) Ein Radfahrer im Punkt $\binom{3}{3}$ und ein Fußgänger im Punkt $\binom{9}{-5}$ bewegen sich aufeinander zu, der Radfahrer mit 20 km/h, der Fußgänger mit 5 km/h. Wann und wo treffen die beiden einander?
(7) Vom Quadrat *ABCD* haben wir folgende Angaben:
   - $A = \binom{-1}{2}$.
   - $B$ liegt auf der Geraden
$$g_B : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   - Die Seitenlänge des Quadrats ist 10.
   - Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit $A, B, C, D$ beschriftet.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes $C$!
(8) Vom Quadrat *ABCD* haben wir folgende Angaben:
   - $A = \binom{1}{2}$.
   - $B$ liegt auf der Geraden
$$g_B : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
   - Die Seitenlänge des Quadrats ist 15.
   - Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit $A, B, C, D$ beschriftet.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes $C$!
(9) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien des Dreiecks *ABC* mit $A = \binom{-2}{-1}$, $B = \binom{5}{1}$ und $C = \binom{3}{5}$ in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie diesen Schnittpunkt.

(10) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt $U = \binom{u_1}{u_2}$ des Dreiecks $ABC$ mit $A = \binom{-2}{-1}$, $B = \binom{5}{1}$ und $C = \binom{3}{5}$, indem Sie die Bedingung, dass $U$ gleich weit von $A$, $B$ und $C$ entfernt ist, in Gleichungen in den Variablen $u_1$ und $u_2$ umwandeln. Verwenden Sie zur Lösung der auftretenden Gleichungen den Mathematica-Befehl `Solve`.

(11) Bestimmen Sie die implizite Darstellung jener Geraden, die parallel zur Geraden $g$ mit

$$g : X = \binom{2}{0} + t \cdot \binom{3}{-4}$$

sind, und von dieser Abstand 10 haben.

(12) Berechnen Sie den Durchschnitt der Geraden $h$ und $j$, wobei

$$h : X = \binom{1}{2} + t \cdot \binom{2}{5}$$

und

$$j : 10x - 4y = 0.$$

(13) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Geraden

$$g_1 : X = \binom{3}{4} + t \cdot \binom{-2}{1}$$

und

$$g_2 : 2x + 4y = 22.$$

(14) Bestimmen Sie den Cosinus des Schnittwinkels der Geraden

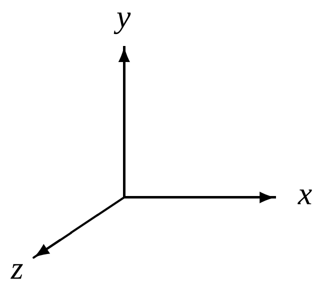
$$g_1 : X = \binom{0}{4} + t \cdot \binom{3}{4}$$

und

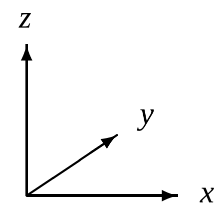
$$g_2 : 12x - 5y = 22.$$

## 7. Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Bisher haben wir uns auf die Geometrie in der Ebene beschränkt. Man kann nun auch den Raum mit Tripeln reeller Zahlen, also mit Elementen aus $\mathbb{R}^3$, koordinatisieren. Die Konvention ist es, die Richtungen der Koordinatenachsen wie in folgenden Skizzen zu wählen:




oder



Hält man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, dass sie paarweise im rechten Winkel aufeinander stehen, dann zeigen sie jeweils in die Richtung der positiven $x$-Achse, $y$-Achse und $z$-Achse.

Wir definieren die Operationen, die im $\mathbb{R}^2$ hilfreich waren, allgemein für

$$\mathbb{R}^n := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

wobei $n$ eine beliebige natürliche Zahl ist.

DEFINITION 1.8. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren:

(1) $\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$.
(2) $\lambda\vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ (Skalarprodukt).
(4) Die *Länge* von $\vec{a}$ ist $||\vec{a}|| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$.

SATZ 1.9. *Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$,
(2) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$,
(3) $\langle \lambda\vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.
(4) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$.
(5) *Wenn* $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$, *so gilt* $\vec{a} = 0$.

.

SATZ 1.10 (Projektionseigenschaft des Skalarprodukts). *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{b} \neq 0$, und sei $\vec{c} := \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \vec{b}$. Dann ist $\vec{a} - \vec{c}$ normal auf $\vec{b}$.*

*Beweis:* $\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$. ∎

Der folgende Satz ist als *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* bekannt. Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sagen wir, dass $\vec{a}$ *ein Vielfaches von* $\vec{b}$ ist, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

SATZ 1.11 (Augustin Cauchy, 1821). *Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(1) $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$.
(2) $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$ *gilt genau dann, wenn* $\vec{b} = 0$ *oder* $\vec{a}$ *ein Vielfaches von* $\vec{b}$ *ist.*

*Beweis:* Wenn $\vec{b} = 0$, so sind beide Seiten der Ungleichung $= 0$. Wir nehmen nun an, dass $\vec{b} \neq 0$. Wir wissen, dass

$$\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} \rangle \geq 0.$$

Nun gilt $\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}\rangle = \langle \vec{a},\vec{a}\rangle - 2\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} + \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} = \langle \vec{a},\vec{a}\rangle - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle}$. Da dieser Ausdruck $\geq 0$ ist, gilt

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle \cdot \langle \vec{b},\vec{b}\rangle \geq \langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2.$$

Folglich gilt auch

$$||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \geq |\langle \vec{a},\vec{b}\rangle|.$$

Somit gilt (1).

Um (2) zu zeigen, nehmen wir an, dass $|\langle \vec{a},\vec{b}\rangle| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$ gilt. Wir zeigen, dass dann $\vec{b} = 0$ gilt, oder dass $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$ ist. Es gilt $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2 = \langle \vec{a},\vec{a}\rangle \cdot \langle \vec{b},\vec{b}\rangle$. Wenn also $\vec{b} \neq 0$, so gilt

$$\langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b}\rangle = 0.$$

Also gilt $\vec{a} - \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle} \cdot \vec{b} = 0$, uns somit ist $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$.

Nun zeigen wir folgendes: wenn $\vec{b} = 0$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist, so gilt $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2 = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$. Wenn $\vec{b} = 0$, so sind beide Seiten der Gleichung $= 0$. Wenn $\vec{b} \neq 0$ und $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, so gilt $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2 = \langle \lambda\vec{b},\vec{b}\rangle^2 = \lambda^2\langle \vec{b},\vec{b}\rangle^2 = \lambda^2\langle \vec{b},\vec{b}\rangle\langle \vec{b},\vec{b}\rangle = \langle \lambda\vec{b},\lambda\vec{b}\rangle \cdot \langle \vec{b},\vec{b}\rangle = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2$. ∎

ÜBUNGSAUFGABEN 1.12.

(1) Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   (a) $||\lambda\vec{a}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{a}||$.
   (b) $||\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}|| = 1$.
(2) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2 = 4\langle \vec{a},\vec{b}\rangle.$$

Nun können wir wie im $\mathbb{R}^2$ zeigen:

SATZ 1.13. *Seien $\vec{a}, \vec{b}$ im $\mathbb{R}^n$, und sei $\varphi$ der Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen. Dann gilt*

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}.$$

*Beweisskizze:* $\langle \vec{a},\vec{a}\rangle + \langle \vec{b},\vec{b}\rangle - 2||\vec{a}||||\vec{b}||\cos(\varphi) = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\rangle$. ∎

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Rechenoperation, die einen Vektor liefert, der auf zwei gegebene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal steht: das Kreuzprodukt.

DEFINITION 1.14. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

ist das *Kreuzprodukt* von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

SATZ 1.15. *Seien* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbb{R}^3$. *Dann gilt:*

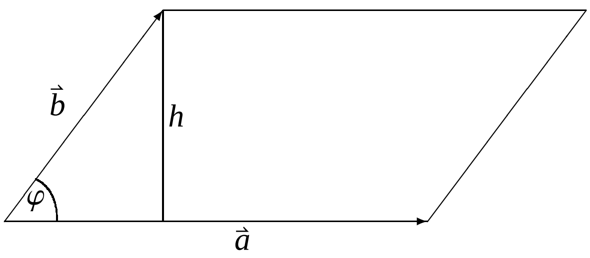
(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ *ist normal auf* $\vec{a}$ *und auf* $\vec{b}$.

(2) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$.
(3) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ *ist die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *aufgespannt wird.*

Beweis: (1): Es gilt

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = 0.$$

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$ wird in der Vorlesung nachgerechnet. (2): Vorlesung. (3): Wir nehmen an, dass $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$.




Wir erhalten für die Höhe $h$ auf $\vec{a}$

$$h = \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$$

und für den Flächeninhalt

$$F = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} F^2 &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot (\sin(\varphi))^2, \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot (1 - (\cos(\varphi))^2) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2. \end{aligned}$$

Aus (2) ergibt sich jetzt

$$F^2 = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2.$$

■

Durch die Bedingungen an Richtung und Länge ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ fast schon eindeutig bestimmt. Zusätzlich gilt: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung $\vec{a}$, der

Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$, und ist der Mittelfinger normal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann zeigt er in die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$.

```
In[9]:= Kreuzprodukt[{a1_, a2_, a3_}, {b1_, b2_, b3_}] :=
          {a2 * b3 - a3 * b2, -(a1 * b3 - a3 * b1), a1 * b2 - a2 * b1}

In[10]:= Kreuzprodukt[{1, -2, 3}, {0, 2, -1}]

Out[10]= {-4, 1, 2}
```

Die Mathematica-Funktion `Cross` liefert ebenfalls das Kreuzprodukt.

ÜBUNGSAUFGABEN 1.16.

(1) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
(2) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichheitsaussage in der Cauchy-Ungleichung (Satz 1.11) und Satz 1.15 (2), dass $\vec{a} \times \vec{b}$ genau dann 0 ist, wenn $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist.
(3) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt (*Lagrange-Identität*).

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle.$$

(4) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle.$$

(5) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{c}.$$

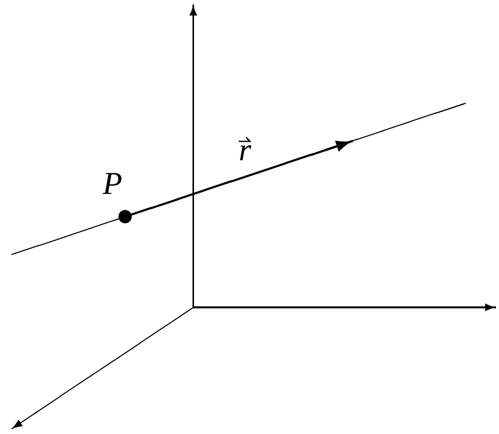
(6) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt (*Jacobi-Identität*):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

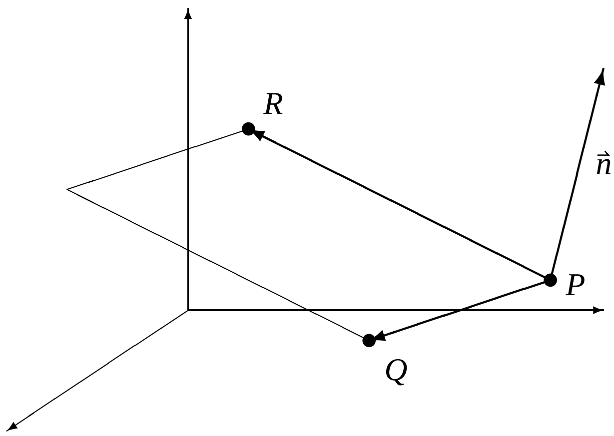
## 8. Geraden und Ebenen im Raum

**8.1. Parameterdarstellung einer Geraden.** Genau wie im $\mathbb{R}^2$ lässt sich eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch eine Parameterdarstellung mit einem Punkt und einem Richtungsvektor angeben. Zum Beispiel,

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$




**8.2. Parameterdarstellung einer Ebene.** Wie kann man die Ebene $e$ beschreiben, die die drei Punkte $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ enthält?




Die Ebene $e$ ist die Menge aller Punkte, die man erreicht, indem man von $P$ aus ein Stück in Richtung $Q$, und dann ein Stück in die Richtung von $P$ nach $R$ geht.

$$e = \{P + \lambda \cdot \vec{PQ} + \mu \cdot \vec{PR} \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

das heißt, die Punkte der Ebene sind von der Form

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Eine Ebene lässt sich also durch einen Punkt und 2 Richtungsvektoren beschreiben.

**8.3. Implizite Darstellung einer Ebene.** Es sei $e$ die Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, die normal auf den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Wir nennen $\vec{n}$ den Normalvektor von $e$.

Die Ebene $e$ ist die Menge aller Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sodass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ normal auf $\vec{n}$ ist, also

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Einsetzen der Werte ergibt die *implizite Darstellung der Ebene*,

$$e = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = -9 \}.$$

Ein Normalvektor von $e$ lässt sich direkt aus den Koeffizienten der Ebenengleichung ablesen.

8.3.1. *Verwandlung von Parameterdarstellung in implizite Darstellung.* Wir verwandeln

$$e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in implizite Form Dazu suchen wir zuerst einen Vektor $\vec{n}$, der auf beide Richtungsvektoren der Ebene normal ist. Dann ist $\vec{n}$ auf die ganze Ebene normal. Wir beschreiben 2 Möglichkeiten einen solchen Normalvektor zu finden:

(1) Wir suchen $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ so, dass

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle &= 0 \text{ und} \\ \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Das heißt, wir müssen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 + 3n_3 &= 0 \\ 2n_1 - n_2 - 3n_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Klarerweise ist $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ eine Lösung, aber wir wollen einen Vektor $\vec{n}$, der nicht der Nullvektor ist. Wie man alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems findet, werden wir im Kapitel 3 sehen.

(2) Alternativ finden wir $\vec{n}$ auch als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{n}$ ist normal auf die Ebene. Ein Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ liegt also genau dann in $e$, wenn der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ normal auf $\vec{n}$ ist. Wir berechnen

$$\langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \vec{n} \rangle = 0$$

und erhalten

$$6x + 9y + z = 38.$$

Somit hat die Ebene $e$ die implizite Darstellung

$$e = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x + 9y + z = 38 \}.$$

8.3.2. *Verwandlung von impliziter Darstellung in Parameterdarstellung.* Wir verwandeln $e : x + 3y - 2z = -9$ in parametrisierte Form. Wir beschreiben die Lösungsmenge der Gleichung, indem wir $z = \mu$ und $y = \lambda$ setzen und dann $x$ durch $\lambda$ und $\mu$ ausdrücken. Wir erhalten $x = -9 - 3\lambda + 2\mu$. Somit liegt für alle Werte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ der Punkt $\left(\begin{smallmatrix} -9-3\lambda+2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right)$ in der Ebene. Die Ebene hat also die parametrisierte Darstellung

$$e : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mu \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

**8.4. Implizite Darstellung einer Geraden.** Offenbar kann man eine Gerade im Raum nicht durch eine einzige lineare Gleichung in $x, y, z$ beschreiben. Solche Gleichungen beschreiben nämlich Ebenen im Raum. Jede Gerade kann man aber implizit als Schnitt zweier Ebenen, das heißt als Lösungsmenge von 2 linearen Gleichungen beschreiben. Beispielsweise ist

$$g = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 1, x + 4y - 2z = 3 \}$$

die Gerade, die sowohl in der Ebene mit der Gleichung $2x - y + 3z = 1$ als auch in der Ebene mit der Gleichung $x + 4y - 2z = 3$ liegt.

Zwei Ebenen im Raum, die nicht parallel sind, schneiden sich immer in einer Geraden. Parallele Ebenen erkennt man daran, dass ihre Normalvektoren in dieselbe Richtung zeigen. Also sind etwa $2x - y + 3z = 1$ und $-4x + 2y - 6z = 3$ parallel.

8.4.1. *Verwandlung von Parameterdarstellung in implizite Darstellung.* Wir verwandeln

$$g : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

in implizite Form. Dazu suchen wir 2 Ebenen, die die Gerade enthalten. Liegt $g$ in einer Ebene mit Normalvektor $\vec{n}$, dann ist $\vec{n}$ normal auf den Richtungsvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ der Geraden. Zusätzlich liegt der Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ in der Ebene.

Auf einen Vektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ sind beispielsweise $\left(\begin{smallmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{smallmatrix}\right)$ normal. Wir wählen $n_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $n_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ als Vektoren, die im rechten Winkel auf $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ stehen. Damit liegt $g$ in den Ebenen durch den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, die normal auf $n_1$ bzw. $n_2$ sind. Die Gerade ist also der Durchschnitt der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} e_1: &\quad x + y = 5, \text{ und} \\ e_2: &\quad 3x - z = 7. \end{aligned}$$

Wir haben

$$g = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 5, 3x - z = 7\}.$$

8.4.2. *Verwandlung von impliziter Darstellung in Parameterdarstellung.* Um eine Parameterdarstellung von

$$g = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 1, x + 4y - 2z = 3\}$$

zu erhalten, lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1, \\ x + 4y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

Eine Methode dafür werden wir im Kapitel 3 vorstellen.

KAPITEL 2

# Matrizen

## 1. Die Definition von Matrizen

Wir haben bereits *Vektoren* kennen gelernt; solche Paare reeller Zahlen haben wir benutzt, um Punkte in der Ebene zu beschreiben. In der Geometrie brauchen wir auch *Matrizen*. Matrizen eignen sich besonders gut, um etwa Drehungen oder Spiegelungen zu beschreiben.

Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema. Zunächst einige Beispiele:

BEISPIELE 2.1.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine $2 \times 3$-Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine $2 \times 2$-Matrix.
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine $2 \times 1$-Matrix.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine $1 \times 3$-Matrix.

Eine Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten bezeichnen wir als eine $m \times n$-Matrix. Wenn $A$ eine $m \times n$-Matrix ist, und $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so bezeichnen wir mit $A(i, j)$, $A[i, j]$ oder $A_{i,j}$ den Eintrag, der bei $A$ in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte steht. Für

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

gilt zum Beispiel $A_{2,1} = 7$. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen kürzen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ ab.

Wir müssen noch den Begriff “rechteckiges Zahlenschema” klären. Man kann eine $m \times n$-Matrix $A$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ als Funktion von $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\mathbb{R}$ definieren. Der Eintrag, der in der 2. Zeile und 4. Spalte steht, ist dann der Funktionswert $A(2, 4)$. Diese Sichtweise gibt auch recht gut wieder, was eine Implementation des abstrakten Datentyps “Matrix” können muss. Es muss möglich sein, eine Funktion `LiefereEintrag` zu schreiben, sodass `LiefereEintrag (A, i, j)` den Eintrag von $A$ an der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte, also den Funktionswert $A(i, j)$, zurückgibt.

In Mathematica geben wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

wie folgt ein.

```
In[11]:= A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}
Out[11]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}

In[12]:= MatrixForm[A]
Out[12]= (1  2  3)
         (4  5  6)

In[13]:= A = {{5, 7, 8}, {-2, 3, 5}}
Out[13]= {{5, 7, 8}, {-2, 3, 5}}

In[14]:= MatrixForm[A]
Out[14]= ( 5  7  8)
         (-2  3  5)

In[15]:= A[[2]][[1]]
Out[15]= -2
```

## 2. Die Addition von Matrizen

Zwei Matrizen kann man addieren, wenn sie gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben. Wie man zwei Matrizen von gleichem Format addiert, erklären wir mit folgenden Beispielen.

AUFGABEN 2.2.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Wir fassen zusammen, wie diese Addition funktioniert: Zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ lassen sich genau dann addieren, wenn $m = n$ und $k = l$ gilt, d.h. wenn die Matrizen von gleichem Format sind. Wenn $C$ die Matrix $A + B$ ist, dann hat auch $C$ das Format $m \times k$, und für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \dots k\}$ berechnet man den Eintrag $C_{i,j}$ durch

$$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

```
In[16]:= A = {{1, 4, 3}, {0, 1, 0}};

In[17]:= B = {{-7, 5, 0}, {23, -7, 16}};

In[18]:= A + B
Out[18]= {{-6, 9, 3}, {23, -6, 16}}

In[19]:= MatrixForm[%]
```

Out[19]= $\begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 23 & -6 & 16 \end{pmatrix}$

## 3. Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

Eine Matrix $A$ wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem jeder Eintrag mit der Zahl multipliziert wird. Wir geben dazu wieder ein Beispiel:

AUFGABE 2.3.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Wir formulieren wieder allgemein, wie man eine reelle Zahl mit einer Matrix $A$ multipliziert. Wenn $t$ eine reelle Zahl, und $A$ eine $m \times n$-Matrix ist, so ist die Matrix $C := t \cdot A$ ebenfalls eine $m \times n$-Matrix. Die Einträge von $C$ sind dadaurch gegeben, dass für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt:

$$C_{i,j} = t\, A_{i,j}.$$

```
In[20]:= A = {{2, 5}, {3, 4}, {10, 2}}
Out[20]= {{2, 5}, {3, 4}, {10, 2}}

In[21]:= MatrixForm[(-10) * A]
```

Out[21]= $\begin{pmatrix} -20 & -50 \\ -30 & -40 \\ -100 & -20 \end{pmatrix}$

## 4. Die Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen $A$, $B$ können genau dann miteinander multipliziert werden, wenn $A$ genausoviele Spalten wie $B$ Zeilen hat. Eine $k \times l$-Matrix ist also mit einer $m \times n$-Matrix multiplizierbar, wenn $l = m$. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist eine $k \times n$-Matrix. Wir erklären die Matrixmultiplikation zunächst anhand eines Beispiels.

AUFGABE 2.4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 7 & 2 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 37 & 6 \\ 39 & 62 & 15 \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine $k \times m$-Matrix $A$ mit einer $m \times n$-Matrix $B$ multipliziert, so ist das Produkt $C$ eine $k \times n$-Matrix. Für $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist der Eintrag $C_{i,j}$ das Skalarprodukt aus der $i$-ten Zeile von $A$ und der $j$-ten Spalte von $B$. Wir rechnen noch einige Beispiele:

AUFGABEN 2.5.

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 19 \\ 23 & -13 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert, da die erste Matrix 3 Spalten und die zweite Matrix 2 Zeilen hat, und 2 nicht gleich 3 ist.

Wenn $A$ eine $2 \times 3$ und $B$ eine $3 \times 1$-Matrix ist, dann ist das Produkt $A \cdot B$ eine $2 \times 1$-Matrix. Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert. Selbst dann, wenn beide Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert sind, müssen die Ergebnisse nicht gleich sein. Dazu rechnen wir folgende Beispiele:

AUFGABEN 2.6.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= (17) \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 25 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das erste Beispiel noch einmal in Mathematica.

```
In[22]:= A = {{3, 1, 2}, {2, 5, 4}};
         B = {{3, 9, 3}, {1, 8, 5}, {7, 1, -4}};

In[23]:= MatrixForm[A.B]
Out[23]= (24  37   6 )
         (39  62  15 )
```

## 5. Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von Matrizen

Wir haben bereits gesehen, dass nicht für alle Matrizen $A \cdot B = B \cdot A$ gelten muss. Einige Rechenregeln, die wir vom Rechnen mit Zahlen kennen, gelten aber auch für Matrizen.

SATZ 2.7 (Assoziativität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, und seien $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

SATZ 2.8 (Rechtsdistributivität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Dann gilt*

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

SATZ 2.9 (Linksdistributivität der Matrizenmultiplikation). *Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B, C \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Dann gilt*

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$

Es ist nicht schwierig, die Assoziativität der Matrizenmultiplikation zu beweisen, wenn $A$, $B$, $C$ alle $2 \times 2$-Matrizen sind. Man berechnet

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right),$$

und stellt fest, dass beide Ergebnisse gleich sind. Für Matrizen von beliebigem Format braucht man folgende Definition der Matrixmultiplikation: Wenn $A$ eine $k \times m$-Matrix, $B$ eine $m \times n$-Matrix, und $C = A \cdot B$ ist, so gilt für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ und alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$C[i, j] := \sum_{r=1}^{m} A[i, r] \cdot B[r, j].$$

Der Beweis der Assoziativität der Matrizenmultiplikation wird in der Vorlesung besprochen.

SATZ 2.10 (Zusammenhang zwischen zwei Multiplikationen). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, und sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(tA) \cdot B = t(A \cdot B)$.*

## 6. Die Multiplikation von Vektoren und Matrizen

Sei $v = \left(\begin{smallmatrix}-2\\4\end{smallmatrix}\right)$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist der Vektor $A \cdot v$ gegeben durch

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+16 \\ -2+0 \\ 2+4 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Die Multiplikation sieht also genauso aus wie die Multiplikation der $3 \times 2$-Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit der $2 \times 1$-Matrix $\left(\begin{smallmatrix}-2\\4\end{smallmatrix}\right)$. Bei der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis aber eine $3 \times 1$-Matrix.

Mit Mathematica wird der Unterschied deutlich:

```
In[24]:= A = {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}};

         v = {-2, 4};

         x = A.v
Out[24]= {22, -2, 6}

In[25]:= A = {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}};

         v = {{-2}, {4}};

         x = A.v
Out[25]= {{22}, {-2}, {6}}

In[26]:= A = {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}};

         v = {{-2, 4}};

         x = A.v
```

Hier liefert Mathematica eine Fehlermeldung.

```
Out[26]= {{-3, 4}, {1, 0}, {-1, 1}}.{{-2, 4}}
```

Sei $v = (-4, 3, 2)$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist der Vektor $v \cdot A$ gegeben durch

$$(-4, 3, 2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (12 + 3 - 2,\ -20 + 2) = (13, -18).$$

Das Ergebnis ist ein Vektor im $\mathbb{R}^2$.

Die Multiplikation sieht also genauso aus wie die Multiplikation der $1 \times 3$-Matrix $(-4\ 3\ 2)$ mit der $3 \times 2$-Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bei der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis aber eine $1 \times 2$-Matrix.

Wenn man diese Multiplikation "Matrix mal Vektor" verwendet, lassen sich lineare Gleichungssysteme kürzer anschreiben.

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 2 \end{aligned}$$

läßt sich dann als

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

schreiben. Im allgemeinen erhält man bei $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten die Form

$$A \cdot x = b,$$

wobei $A$ eine $m \times n$-Matrix ist, $x$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ und $b$ ein Vektor im $\mathbb{R}^m$.

Die Funktion `LinearSolve[A,b]` liefert eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Wir lösen zum Beispiel $2x - 3y = 5$.

```
In[27]:= LinearSolve[{{2, -3}}, {5}]
```

Out[27]= $\left\{\frac{5}{2}, 0\right\}$

Später werden wir sehen, wie man alle Lösungen erhält.

## 7. Das Transponieren von Matrizen

Beim *Transponieren* einer Matrix wird die Matrix an der Hauptdiagonale gespiegelt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Wenn $A$ eine $m \times n$-Matrix ist, so ist $A^T$ eine $n \times m$-Matrix, und für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt

$$A^T(i, j) = A(j, i).$$

```
In[28]:= A = {{1, 4, -3}, {2, -5, 3}};

In[29]:= MatrixForm[A]
```

*Out[29]=* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

```
In[30]:= B = Transpose[A]
Out[30]= {{1, 2}, {4, -5}, {-3, 3}}
```

```
In[31]:= MatrixForm[B]
```

*Out[31]=* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

SATZ 2.11. *Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, und seien $B, C \in R^{m \times n}$. Dann gilt:*

(1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
(2) $(B + C)^T = B^T + C^T$

ÜBUNGSAUFGABEN 2.12.

(1) Berechnen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

die Matrix $B := A^T \cdot A$.

(2) Berechnen Sie $(A - B) \cdot C^T$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Finden Sie eine Matrix $X$, sodaß $A \cdot X = B$, wobei $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. (Hinweis: Bestimmen Sie jede Spalte von $X$ durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.)

## 8. Die Einheitsmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Einheitsmatrix vom Format $n \times n$. Man sieht leicht, daß für jede $m \times n$-Matrix $A$ und jede $n \times k$-Matrix $B$ gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot E_n &= A, \\ E_n \cdot B &= B. \end{aligned}$$

Besonders einfach zu lösen sind Gleichungssysteme mit der Einheitsmatrix: Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $x = 4$, $y = 2$, und daher die Lösungsmenge $L = \{(4, 2)\}$.

```
In[32]:= A = -24 * IdentityMatrix[5];

         MatrixForm[A]

Out[32]= -24   0    0    0    0
          0   -24   0    0    0
          0    0   -24   0    0
          0    0    0   -24   0
          0    0    0    0   -24
```

## 9. Das Invertieren von Matrizen

Betrachtet man die Gleichung $5\,x = 7$, so erhält man die Lösung $x = \frac{7}{5}$ durch Multiplikation beider Seiten mit $\frac{1}{5}$ (des Inversen von 5). Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Seien wir nun optimistisch, und stellen wir uns vor, wir haben eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sodass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Lösungen des Gleichungssystems muss dann auch gelten:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie bestimmen wir so eine Matrix $A$? Wir suchen eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2a + 5b &= 1 \\ 3a - 5b &= 0 \\ 2c + 5d &= 0 \\ 3c - 5d &= 1 \end{aligned}$$

Lösen wir dieses, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 \\ 0,2 & -0,08 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir auch die Lösung des ursprünglichen Systems berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(0, 4)$ der einzige Kandidat für eine Lösung des Systems. Da $(0, 4)$ auch wirklich Lösung ist, ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{(0, 4)\}$.

DEFINITION 2.13. Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$. $A$ heißt *invertierbar*, falls es eine $n \times n$-Matrix $B$ mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ gibt.

SATZ 2.14. *Seien $A_1, A_2$ invertierbare Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist auch $A_1 \cdot A_2$ invertierbar.*

*Beweis.* Seien $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Es gibt daher Matrizen $B_1, B_2$, sodass $A_1 \cdot B_1 = B_1 \cdot A_1 = E_n$ und $A_2 \cdot B_2 = B_2 \cdot A_2 = E_n$. Dann gilt $(A_1 \cdot A_2) \cdot (B_2 \cdot B_1) = A_1 \cdot (A_2 \cdot B_2) \cdot B_1 = A_1 \cdot E_n \cdot B_1 = A_1 \cdot B_1 = E_n$. Somit ist $A_1 \cdot A_2$ invertierbar. ∎

SATZ 2.15. *Sei $A$ eine invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, und sei $B$ so, dass $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. Sei $C$ eine Matrix mit $A \cdot C = E_n$. Dann gilt $B = C$.*

*Beweis.* Es gilt $C = E_n \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot E_n = B$. ∎

Zu jeder invertierbaren Matrix $A$ gibt es also genau eine Matrix $B$ mit $A \cdot B = E_n$. Diese Matrix $B$ kürzen wir mit $A^{-1}$ ab.

DEFINITION 2.16. Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. $A$ ist *regulär* genau dann, wenn $A$ invertierbar ist. $A$ ist *singulär* genau dann, wenn $A$ nicht invertierbar ist.

ÜBUNGSAUFGABEN 2.17.

(1) Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gilt.

(2) Sei $A$ eine $m \times m$- Matrix, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt, und sei $E$ die $m \times m$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist. *Hinweis:* Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

SATZ 2.18. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbare Matrizen.*

(1) *$A^{-1}$ ist invertierbar, und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.*
(2) *$A^T$ ist invertierbar, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*
(3) *$A \cdot B$ ist invertierbar, und es gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

*Beweis.*

(1) Es gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$. Also ist $A^{-1}$ invertierbar, und $B := A$ ihre inverse Matrix.
(2) Es gilt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$. Durch Transponieren erhält man $(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = E_n$. Folglich ist $A^T$ invertierbar, und die inverse Matrix zu $A^T$ ist $(A^{-1})^T$.
(3) Es gilt $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = E_n$ und $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = E_n$. Folglich ist $A \cdot B$ invertierbar, und die inverse Matrix von $A \cdot B$ ist $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

■

Den folgenden Satz werden wir erst später beweisen:

SATZ 2.19. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A \cdot B = E_n$. Dann ist $A$ invertierbar. Außerdem ist dann $B$ die zu $A$ inverse Matrix.*

Wir berechnen jetzt die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
In[33]:= A = {{1, 3}, {2, -4}};

         LinearSolve [A, {1, 0}]
```

Out[33]= $\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

Also $a = 0.4, c = 0.2$.

```
In[34]:= A = {{1, 3}, {2, -4}};

         LinearSolve [A, {0, 1}]
```

Out[34]= $\left\{\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right\}$

Also $b = 0.3$, $d = -0.1$.

Die Funktion `Inverse` berechnet die inverse Matrix; die Funktion `^(-1)` macht leider etwas ganz anderes.

```
In[35]:= A = {{1, 3}, {2, -4}};

         B = Inverse[A];

         MatrixForm[B]
```

Out[35]= $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

```
In[36]:= A.B
Out[36]= {{1, 0}, {0, 1}}

In[37]:= B.A
Out[37]= {{1, 0}, {0, 1}}

In[38]:= A^(-1)
```

Out[38]= $\left\{\left\{1, \frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right\}\right\}$

```
In[39]:= A.A^(-1)
```

Out[39]= $\left\{\left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{12}\right\}, \left\{0, \frac{5}{3}\right\}\right\}$

KAPITEL 3

# Lineare Gleichungssysteme

## 1. Beispiele

Wir betrachten zunächst vier Gleichungssysteme und bestimmen ihre Lösungsmenge. Dabei geht es uns noch nicht darum, ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme zu entwickeln (das kommt später), sondern nur darum, ein paar typische Phänomene zu beobachten.

(1) Man bestimme alle Paare $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$, die sowohl die Gleichung $x + y = -1$ als auch die Gleichung $3x + 2y = -5$ erfüllen. Wir suchen also alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= -1 & \quad (1) \\ 3x + 2y &= -5 & \quad (2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

*Lösung:* Wenn $\binom{x}{y}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt $x + y = -1$. Daher gilt auch $-3x - 3y = 3$. Somit ist jede Lösung des Systems (3.1) auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} -3x - 3y &= 3 & \quad (1') \\ 3x + 2y &= -5 & \quad (2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wenn $-3x-3y = 3$ und $3x+2y = -5$, dann gilt auch $(-3x-3y)+(3x+2y) = 3 + (-5)$, also $-y = -2$. Daher muss $y = 2$ sein. Da aber $x + y = -1$ ist, muss $x = -1 - y$ sein, und daher ist $x = -3$. Daher ist nur $\binom{-3}{2}$ als Lösung des Gleichungssystems möglich.

Wir probieren nun aus, ob $\binom{-3}{2}$ auch wirklich eine Lösung ist. Tatsächlich gilt $-3 + 2 = -1$ und $3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = -5$. Daher ist die Menge

$$L = \{\tbinom{-3}{2}\}$$

die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Jene Punkte $\binom{x}{y}$ im $\mathbb{R}^2$, die die Gleichung $x + y = -1$ erfüllen, liegen auf einer Geraden (eben auf der Geraden mit Gleichung $x + y = -1$). Jene Punkte $\binom{x}{y}$, die die Gleichung $3x + 2y = -5$ erfüllen, liegen auf der Geraden mit Gleichung $3x + 2y = -5$. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält alle Punkte, die auf beiden Geraden liegen. Wenn die beiden Geraden nicht parallel sind, so gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt, nämlich den Schnittpunkt der beiden Geraden. Dieser Schnittpunkt ist in diesem Beispiel der Punkt $\binom{-3}{2}$.

(2) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 3y &= -1 & (1)\\ -3x - 9y &= 2 & (2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

*Lösung:* Wenn $\binom{x}{y}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt $x + 3y = -1$. Daher gilt auch $3x + 9y = -3$. Somit ist jede Lösung des Systems (3.3) auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} 3x + 9y &= -3 & (1')\\ -3x - 9y &= 2 & (2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wenn $3x + 9y = -3$ und $-3x - 9y = 2$, dann gilt auch

$$(3x + 9y) + (-3x - 9y) = -3 + 2. \tag{3.5}$$

Die linke Seite von (3.5) ist aber immer 0. Jede Lösung $\binom{x}{y}$ des Gleichungssystems (3.3) muss also $0 = -3 + 2$, also $0 = -1$ erfüllen. Egal welche $x, y$ man in die Gleichung (3.5) einsetzt: die Gleichung (3.5) kann nie erfüllt sein.

Somit hat das Gleichungssystem (3.3) keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge, also

$$L = \{\} = \emptyset.$$

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Die Gerade $x + 3y = -1$ hat den Normalvektor $\binom{1}{3}$. Die Gerade $-3x - 9y = 2$ hat den Normalvektor $\binom{-3}{-9}$. Der Vektor $\binom{-3}{-9}$ ist ein Vielfaches des Vektors $\binom{1}{3}$. Die beiden Geraden sind also parallel. Zwei parallele Geraden sind entweder identisch, oder sie haben keinen gemeinsamen Punkt. Da das Gleichungssystem (3.3) unlösbar ist, haben die beiden Geraden keinen gemeinsamen Punkt; sie sind also zwei verschiedene parallele Geraden.

(3) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 5y &= -4 & (1)\\ -2x - 10y &= 8 & (2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

*Lösung:* Wenn $\binom{x}{y}$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, dann gilt $x + 5y = -4$. Daher gilt auch $2x + 10y = -8$. Somit ist jede Lösung des Systems (3.6) auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} 2x + 10y &= -8 & (1')\\ -2x - 10y &= 8 & (2). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wenn $2x + 10y = -8$ und $-2x - 10y = 8$, dann gilt auch

$$(2x + 10y) + (-2x - 10y) = -8 + 8. \tag{3.8}$$

Sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung (3.8) ist also 0. Somit ist die Gleichung (3.8) für alle $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}^2$ erfüllt. Sie liefert also keine Einschränkung für die Lösungen.

Nicht jeder Punkt $\binom{x}{y}$ in $\mathbb{R}^2$ ist eine Lösung des Systems (3.6). (Der Punkt $\binom{0}{0}$ erfüllt nicht einmal die erste Gleichung.) Wir sehen aber, dass jede Lösung der ersten Gleichung von (3.6) auch eine Lösung der zweiten Gleichung von (3.6) ist: das liegt daran, dass die zweite Gleichung entsteht, wenn man beide Seiten der ersten Gleichung mit $-2$ multipliziert. Man kann also die zweite Gleichung einfach weglassen (sie liefert keine weitere Einschränkung für $x$ und $y$), und nur mehr die Lösungen von

$$x + 5\,y = -4$$

bestimmen. Wir sehen, dass wir für jeden Wert, den wir für $y$ vorgeben, einen Wert für $x$ erhalten. Wenn wir für $y := t$ setzen, erhalten wir für $x$ den Wert $x = -4 - 5\,t$. Somit können wir die Lösungsmenge $L$ so angeben:

$$L = \{\binom{-4-5\,t}{t} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Lösungsmenge $L$ ist also eine Gerade durch $\binom{-4}{0}$ mit Richtungsvektor $\binom{-5}{1}$.

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Die Gleichungen $x + 5\,y = -4$ und $-2\,x - 10\,y = 8$ werden von denselben $\binom{x}{y}$ erfüllt. Sie beschreiben also die gleiche Gerade. Der Schnitt dieser beiden Geraden miteinander ist also genau diese eine Gerade. Und wirklich: $X = \binom{-4}{0} + t \cdot \binom{-5}{1}$ ist genau die Parameterdarstellung der Geraden $x + 5\,y = -4$.

(4) Wir suchen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3\,x + 4\,y &= -1 \qquad (1)\\ 5\,x + 10\,y &= -5 \qquad (2)\\ 2\,x + 8\,y &= -6 \qquad (3). \end{aligned} \tag{3.9}$$

*Lösung:* Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 5, und die Gleichung (2) mit $-3$ und erhalten

$$\begin{aligned} 15\,x + 20\,y &= -5 \qquad (1')\\ -15\,x - 30\,y &= 15 \qquad (2')\\ 2\,x + 8\,y &= -6 \qquad (3). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jede Lösung von (1′) und (2′) erfüllt auch

$$(15\,x + 20\,y) + (-15\,x - 30\,y) = -5 + 15,$$

also $-10\,y = 10$, und somit $y = -1$. Wenn $y = -1$, dann muss wegen der Gleichung (1) gelten:

$$3\,x = -1 - 4\,y,$$

also $3\,x = -1 + 4$, und somit $x = 1$.

Die Frage ist, ob $\binom{1}{-1}$ auch wirklich eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wir haben bis jetzt ja nur so begründet, dass für jede Lösung $\binom{x}{y}$ des Gleichungssystems $x = 1$ und $y = -1$ gelten muss. Wir wissen aber noch nicht, ob $\binom{1}{-1}$ die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt. So haben wir etwa die Gleichung (3) beim Ausrechnen von $x$ und $y$ noch gar nicht verwendet! Wir müssen also ausprobieren, ob $\binom{1}{-1}$ wirklich alle drei Gleichungen erfüllt. Es gilt $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -1$, $5 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = -5$ und $2 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) = -6$. Das Paar $\binom{1}{-1}$ erfüllt also wirklich alle drei Gleichungen, und es gilt somit

$$L = \{\binom{1}{-1}\}.$$

Wir interpretieren dieses Beispiel jetzt geometrisch. Von den drei Geraden, die durch die Gleichungen (1), (2) und (3) beschrieben werden, sind keine zwei parallel, da kein Normalvektor ein Vielfaches eines anderen Normalvektors ist. Alle drei Geraden gehen durch den Punkt $\binom{1}{-1}$. Die drei Geraden gehen also "sternförmig" durch den Punkt $\binom{1}{-1}$.

Das Gleichungssystem (3.6) zeigt, dass die Lösungsmenge $L$ eines linearen Gleichungssystems nicht leer oder einelementig sein muss, sondern auch eine unendliche Menge sein kann. Für die Darstellung der Lösungsmenge $L$ des Systems (3.6) gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) *Implizite Darstellung* der Lösung: Jedes Paar $(x, y)$, das $x+5y = -4$ erfüllt, ist auch eine Lösung für das gesamte Gleichungssystem. Die Lösung kann also in der Form
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y = -4\}$$
geschrieben werden.

(2) *Parametrisierte Darstellung* der Lösung: Wir können die Lösungsmenge als
$$L = \{(-4, 0) + t \cdot (-5, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
schreiben.

Wollen wir nun überprüfen, ob das Paar $(3, 4)$ in der Lösungsmenge liegt, so müssen wir bei impliziter Darstellung nur $x = 3$ und $y = 4$ in $x + 5y$ einsetzen. Da wir dabei 23 und nicht $-4$ erhalten, folgt $(3, 4) \notin L$. Bei parametrisierter Darstellung müssen wir dazu das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4 - 5t &= 3 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

lösen. Aus der Tatsache, dass dieses System keine Lösung besitzt, können wir $(3, 4) \notin L$ schließen.

Die implizite Darstellung lässt jedoch keine direkte geometrische Interpretation zu, während man aus der parametrisierten Darstellung sofort erkennt, dass es sich bei der Lösungsmenge um eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit der Steigung $-\frac{1}{5}$ handelt.

Auch andere Kurven im $\mathbb{R}^2$ lassen sich sowohl implizit als auch parametrisiert darstellen. So ist zum Beispiel der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung gegeben durch

$$\begin{aligned} K &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \{(\cos t, \sin t) \,|\, t \in \mathbb{R},\ 0 \le t < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Wir werden uns überlegen, wie wir die Lösungsmenge von einer Darstellungsform in die andere umrechnen können. Die jeweiligen Übergänge nennt man *Parametrisieren* (*Lösen*) bzw. *Implizitisieren*.

## 2. Die Lösung von Gleichungssystemen in Staffelform

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(3.11) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem können wir so lösen: $x_5$ können wir beliebig festlegen. Wir setzen also

$$x_5 = t.$$

Wir erhalten

$$-16\,x_4 + 8\,t = 16,$$

also

$$x_4 = -1 + \frac{1}{2}\,t.$$

Da $x_3$ frei wählbar ist, setzen wir $x_3$ auf $s$.

Dann erhalten wir

$$x_2 = 5 + 2\,x_3 + 4\,x_4 - 2\,x_5,$$

also

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 + 2\,s - 4 + 2\,t - 2\,t \\ x_2 &= 1 + 2\,s. \end{aligned}$$

Schließlich

$$x_1 = -2 + 2\,s + t.$$

Also ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \{\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \,|\, s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine besonders angenehme Koeffizientenmatrix. Sie ist nämlich in *Zeilenstaffelform*. Wir definieren:

DEFINITION 3.1. Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix. $A$ ist in *Zeilenstaffelform*, wenn es $r \in \mathbb{N}_0$ und $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass

(1) $j_r > j_{r-1} > \cdots > j_1$.
(2) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt: $A(i, j_i) \neq 0$.
(3) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $k < j_i$ gilt: $A(i, k) = 0$.
(4) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i > r$ und für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: $A(i, k) = 0$.

Wenn $A$ eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstaffelform ist, und $r$ wie in obiger Definition, dann treten in der Lösung von $A \cdot x = 0$ genau $n - r$ frei wählbare Parameter auf.

ÜBUNGSAUFGABEN 3.2.

(1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

(2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 - 1\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,x_4 + 1\,x_5 &= 12 \\ 1\,x_2 + 1\,x_3 - 1\,x_4 + 1\,x_5 &= 4 \\ 1\,x_3 + 0\,x_4 - 1\,x_5 &= 14. \end{aligned}$$

(4) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

## 3. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Wenn die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems Zeilenstaffelform hat, dann wissen wir bereits, wie wir alle Lösungen des Gleichungssystems bestimmen. Wir erklären mit einem Beispiel, wie wir sonst vorgehen. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Wir schreiben uns zunächst das System anders auf.

$$\begin{array}{ccccccc} I & 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & -9 \\ II & 1 & -4 & 6 & -2 & 0 & -4 \\ III & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ IV & 5 & -8 & 6 & 0 & -5 & -18 \\ \hline \end{array}$$

Wir addieren nun passende Vielfache der Gleichung I zu jeder der anderen Gleichungen, sodass in den neuen Gleichungen die Variable $x_1$ nicht mehr vorkommt. Das führt auf

$$\begin{array}{cccccccc} II' & 0 & 1 & -2 & -4 & 2 & 5 & -I + II \\ III' & 0 & -5 & 10 & 4 & -2 & -9 & I + III \\ IV' & 0 & 17 & -34 & -10 & 5 & 27 & (-5) \cdot I + IV \\ \hline \end{array} \tag{3.13}$$

Nun hat das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen I,II,III,IV besteht, die gleiche Lösungsmenge wie das Gleichungssystem, das aus den Gleichungen I,II’,III’,IV’ besteht.

Das kann man so begründen: wenn ein Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ die Gleichungen I und IV erfüllt, dann erfüllt es auch die Gleichung IV’, die ja eine Linearkombination (= Summer von Vielfachen) der Gleichungen I und IV ist. Sei nun $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ein Tupel, das die Gleichungen I und IV’ erfüllt. Da IV’ = −5· I + IV, gilt IV = IV’ + 5· I. Daher ist die Gleichung IV eine Linearkombination der Gleichungen IV’ und I. Also muss das Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ auch die Gleichung IV erfüllen.

Wir können also anstelle des Gleichungssystems I,II,III,IV das Gleichungssystem I,II’,III’,IV’ lösen. In den Gleichungen II’, III’, IV’ kommt die Variable $x_1$ nicht vor. Also können wir so vorgehen: wir bestimmen die Lösungen $(x_2, x_3, x_4, x_5)$ der Gleichungen II’, III’, IV’. Für jede dieser Lösungen rechnen wir uns dann aus der Gleichung I den Wert von $x_1$ aus.

Um die Lösungen von II’, III’, IV’ zu bestimmen, addieren wir wieder passende Vielfache der Gleichung II’ zu III’ und IV’. Wir erhalten

$$\begin{array}{cccccccc} III'' & 0 & 0 & 0 & -16 & 8 & 16 & 5 \cdot II' + III' \\ IV'' & 0 & 0 & 0 & 58 & -29 & -58 & (-17) \cdot II' + IV' \\ \hline \end{array} \tag{3.14}$$

Nun können wir alle Lösungen $(x_3, x_4, x_5)$ der Gleichungen III" und IV" bestimmen. Dann können wir für jede Lösung aus II' den Wert von $x_2$ bestimmen (und dann aus I den Wert von $x_1$).

In den Gleichungen III" und IV" kommt $x_3$ nicht vor. Wenn wir also eine Lösung $(x_4, x_5)$ für die Gleichungen III" und IV" finden, dann können wir für $x_3$ jede beliebige Zahl einsetzen. Für jede solche Setzung erhalten wir eine Lösung $(x_3, x_4, x_5)$ von III" und IV". Wir merken uns:

$x_3$ ist frei wählbar,

sofern es Lösungen $(x_4, x_5)$ für III" und IV" gibt. Jetzt versuchen wir, alle Lösungen $(x_4, x_5)$ von III" und IV" zu finden. Dazu addieren wir ein passendes Vielfaches der Gleichung III" zur Gleichung IV". Wir erhalten

$$\begin{array}{ccccccccc} IV''' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 58 \cdot III'' + 16 \cdot IV'' \\ \hline \end{array} \tag{3.15}$$

Alle Lösungen $(x_5)$ dieser letzten Gleichung zu finden, ist einfach: wir können jeden Wert für $x_5$ einsetzen. Also:

$x_5$ ist frei wählbar.

Setzen wir also $x_5$ auf $t$, und schauen wir, welche Werte sich für die anderen Variablen ergeben.

Aus der Gleichung III" erhalten wir

$$-16\,x_4 + 8\,t = 16,$$

also

$$x_4 = -1 + \frac{1}{2}\,t.$$

Da $x_3$ frei wählbar ist, setzen wir $x_3$ auf $s$.

Aus der Gleichung II' erhalten wir

$$x_2 = 5 + 2\,x_3 + 4\,x_4 - 2\,x_5,$$

also

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 + 2\,s - 4 + 2\,t - 2\,t \\ x_2 &= 1 + 2\,s. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung I erhalten wir schließlich

$$x_1 = -2 + 2\,s + t.$$

Also ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

## ÜBUNGSAUFGABEN 3.3.

(1) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= -10\\ -x+7y+2z &= -10\\ 5x-8y+5z &= -10. \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4x+2y+3z &= 12\\ -6x+3y+0z &= -18\\ 6x-3y+2z &= 34 \end{aligned}$$

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1x+0y+2z &= 16\\ 2x+3y-z &= -8\\ 0x+2y-3z &= -36 \end{aligned}$$

(4) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form an!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 8\\ 2 & -3 & 8 & 0\\ 10 & -7 & 24 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32\\ 16\\ 112 \end{pmatrix}.$$

(5) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in parametrisierter Form an!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 8\\ 10 & -7 & -16 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\\ 8\\ 56 \end{pmatrix}$$

(6) Ergänzen Sie die Gleichung

$$3x-2y+5z = 0$$

so zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen, dass das System
- (a) keine Lösung
- (b) genau eine Lösung
- (c) genau zwei Lösungen
- (d) eine Gerade als Lösungsmenge
- (e) eine Ebene als Lösungsmenge

hat.

(7) Für zwei Goldbarren und acht Silbertaler erhalten Sie 69.000.– Schilling, für 7 Barren und 3 Taler 84.000.– Schilling. Wieviel ist ein Goldbarren wert? Wieviel ist ein Silbertaler wert?

(8) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3\\ 2 & 10 & 8\\ 4 & 20 & 15\\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16\\ 34\\ 67\\ 21 \end{pmatrix}.$$

(9) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2\\ 2 & 8 & 14 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3\\ 6\\ -2 \end{pmatrix}.$$

(10) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem, und geben Sie die Lösungsmenge paramtrisiert an!

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1\\ -3 & 2 & 2 & 0\\ -6 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -8\\ -13\\ -28 \end{pmatrix}.$$

## 4. Einige durchgerechnete Beispiele zum Gauß-Algorithmus

---

AUFGABE 3.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

*In[40]:=* **<< GaussDemo6.m**

*In[41]:=* **Gauss [A1, b1]**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & | & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & | & -9 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 & | & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & -5 & | & -18 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x1

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x2 & x3 & x4 & x5 & | & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 2 & | & 5 \\ -5 & 10 & 4 & -2 & | & -9 \\ 17 & -34 & -10 & 5 & | & 27 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x3 & x4 & x5 & | & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -16 & 8 & | & 16 \\ 0 & 58 & -29 & | & -58 \end{pmatrix} \end{array}$$

x3 does not appear in any equation.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x4 & x5 & | & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} -16 & 8 & | & 16 \\ 58 & -29 & | & -58 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x4

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x5 & | & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

x5 does not appear in any equation.

x5 := t1

We use

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x4 & x5 & | & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} -16 & 8 & | & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

to compute x4

$x4 = -1 + \frac{t1}{2}$

x3 := t2

We use

$$\begin{pmatrix} x2 & x3 & x4 & x5 & | & \\ 1 & -2 & -4 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$$

to compute x2

x2 = 1 + 2 t2

We use

$$\begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & | & \\ 1 & -5 & 8 & 2 & -2 & | & -9 \end{pmatrix}$$

to compute x1

x1 = −2 + t1 + 2 t2

*Out[41]=* $\left\{\{-2, 1, 0, -1, 0\}, \left\{\left\{1, 0, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \{2, 2, 1, 0, 0\}\right\}\right\}$

---

AUFGABE 3.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*In[42]:=* **<< GaussDemo6.m**

*In[43]:=* **Gauss [A2, b2]**

$$\begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 & | & \\ 1 & 5 & 7 & 9 & | & 0 \\ 2 & 10 & 14 & 18 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x1

$$\begin{pmatrix} x2 & x3 & x4 & | & \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ -13 & -20 & -27 & | & 1 \end{pmatrix}$$

We use equation (2) of the last system to eliminate x2

$$\begin{pmatrix} x3 & x4 & | & \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

x3 does not appear in any equation.

$$\begin{pmatrix} x4 & | & \\ 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

x4 does not appear in any equation.

The system has no solution

*Out[43]=* NOSOLUTION

---

AUFGABE 3.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 67 \\ 21 \end{pmatrix}$$

*In[44]:=* **<< GaussDemo6.m**

*In[45]:=* **Gauss[A3, b3]**

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x2 & x3 & | & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 16 \\ 2 & 10 & 8 & | & 34 \\ 4 & 20 & 15 & | & 67 \\ 1 & 6 & 5 & | & 21 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x1

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x2 & x3 & | & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & | & 3 \\ 1 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (3) of the last system to eliminate x2

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x3 & | & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & | & 2 \\ 3 & | & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x3

We use

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x3 & | & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & | & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

to compute x3

x3 = 1

We use

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x2 & x3 & | & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

to compute x2

x2 = 3

We use

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x2 & x3 & | & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

to compute x1

x1 = -2

*Out[45]=* {{-2, 3, 1}, {}}

---

AUFGABE 3.7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ 68 \\ 22 \end{pmatrix}$$

*In[46]:=* **<< GaussDemo6.m**

*In[47]:=* **Gauss [A4, b4]**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x1 & x2 & x3 & | & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 16 \\ 2 & 10 & 8 & | & 34 \\ 4 & 20 & 15 & | & 68 \\ 1 & 6 & 5 & | & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x1

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x2 & x3 & | & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & | & 4 \\ 1 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (3) of the last system to eliminate x2

$$\begin{pmatrix} x3 & | & \\ 2 & | & 2 \\ 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x3

The system has no solution

*Out[47]=* NOSOLUTION

---

AUFGABE 3.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

*In[48]:=* **<< GaussDemo6.m**

*In[49]:=* **Gauss[A5, b5]**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & | & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 & | & 5 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & | & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 9 & 9 & 0 & | & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x1

$$\begin{array}{cccccccc} x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & | & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & -5 & 0 & 14 & 17 & 0 & | & 17 \\ 0 & 13 & 0 & -23 & -29 & 0 & | & -17 \\ 0 & 8 & 0 & -9 & -12 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

x2 does not appear in any equation.

$$\begin{array}{ccccccc} x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & | & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccccc} -5 & 0 & 14 & 17 & 0 & | & 17 \\ 13 & 0 & -23 & -29 & 0 & | & -17 \\ 8 & 0 & -9 & -12 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x3

$$\left(\begin{array}{cccccc} x4 & x5 & x6 & x7 & | & \\ 0 & 67 & 76 & 0 & | & 136 \\ 0 & 67 & 76 & 0 & | & 136 \end{array}\right)$$

x4 does not appear in any equation.

$$\left(\begin{array}{ccccc} x5 & x6 & x7 & | & \\ 67 & 76 & 0 & | & 136 \\ 67 & 76 & 0 & | & 136 \end{array}\right)$$

We use equation (1) of the last system to eliminate x5

$$\left(\begin{array}{cccc} x6 & x7 & | & \\ 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

x6 does not appear in any equation.

$$\left(\begin{array}{ccc} x7 & | & \\ 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

x7 does not appear in any equation.

x7 := t1

x6 := t2

We use

$$\left(\begin{array}{ccccc} x5 & x6 & x7 & | & \\ 67 & 76 & 0 & | & 136 \end{array}\right)$$

to compute x5

$x5 = \frac{136}{67} + -\frac{76\,t2}{67}$

x4 := t3

We use

$$\left(\begin{array}{ccccccc} x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & | & \\ -5 & 0 & 14 & 17 & 0 & | & 17 \end{array}\right)$$

to compute x3

$x3 = \frac{153}{67} + \frac{15\,t2}{67}$

x2 := t4

We use

$$\begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & | & \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 6 & 7 & 0 & | & 5 \end{pmatrix}$$

to compute x1

$x1 = -\frac{22}{67} + \frac{32\,t2}{67} - 2\,t4$

*Out[49]=* $\left\{\left\{-\frac{22}{67}, 0, \frac{153}{67}, 0, \frac{136}{67}, 0, 0\right\}, \left\{\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}, \left\{\frac{32}{67}, 0, \frac{15}{67}, 0, -\frac{76}{67}, 1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}, \{-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}\right\}\right\}$

ANHANG A

# Programme, die vorrechnen

Die Mathematica-Files `GaussDemo6.m` und `RowRed9.m` enthalten Mathematica-Funktionen, die folgende Probleme mit Zwischenschritten vorrechnen:

- Lösen eines linearen Gleichungssystems (`Gauss[A,b]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonForm[A]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonNormalForm[A]`).
- Bestimmen der Determinante einer Matrix (`DeterminantenDemo[A]`).

Die Programme können von Mathematica aus mit `<< GaussDemo6.m` und `<< RowRed9.m` geladen werden.
Sie sind auf `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/MathInf/vlws05/MathematicaProgramme/` erhältlich und werden den Studierenden ausschließlich für die Nutzung im Rahmen des Kurses “Lineare Algebra” zur Verfügung gestellt.