Teil 4

Mengen und Relationen

KAPITEL 10

Äquivalenzrelationen und Faktormengen

1. Äquivalenzrelationen

Wir nennen eine Relation von A nach A auch eine *Relation auf A*.

DEFINITION 10.1. Sei ρ eine Relation auf A.

(1) ρ ist *reflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in \rho$.
(2) ρ ist *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt: wenn $(a, b) \in \rho$ und $(b, c) \in \rho$, so gilt auch $(a, c) \in \rho$.
(3) ρ ist *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: wenn $(a, b) \in \rho$, so gilt auch $(b, a) \in \rho$.

DEFINITION 10.2. Sei ρ eine Relation auf A. Die Relation ρ ist eine *Äquivalenzrelation auf A*, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

DEFINITION 10.3. Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A, und sei $a \in A$. Die *Äquivalenzklasse von a bezüglich* ρ wird mit $[a]_\rho$ oder a/ρ abgekürzt, und ist definiert durch

$$a/\rho := \{b \in A \mid (a, b) \in \rho\}.$$

Eine Teilmenge C von A ist eine *Äquivalenzklasse von* ρ, wenn es ein $a \in A$ gibt, sodass $C = a/\rho$.

LEMMA 10.4. *Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A, und seien $a, b \in A$. Wenn $(a, b) \in \rho$, so gilt $[a]_\rho = [b]_\rho$.*

Beweis: Sei $c \in [a]_\rho$. Dann gilt $(a, c) \in \rho$. Wegen der Symmetrie von ρ gilt auch $(b, a) \in \rho$, und somit wegen der Transitivität von ρ auch $(b, c) \in \rho$. Somit gilt $c \in [b]_\rho$. Sei nun $c \in [b]_\rho$. Dann gilt $(b, c) \in \rho$ und somit wegen $(a, b) \in \rho$ und der Transitivität von ρ auch $(a, c) \in \rho$, und somit $c \in [a]_\rho$. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 10.5.

(1) Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A, und seien $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $(a, b) \in \rho$.
   (b) $[a]_\rho = [b]_\rho$.
   (c) $a \in [b]_\rho$.
   (d) $[a]_\rho \cap [b]_\rho \neq \emptyset$.

2. Partitionen

DEFINITION 10.6. Sei A eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{P}$ von $\mathcal{P}(A)$ ist eine *Partition von A*, wenn

(1) für alle $P \in \mathcal{P} : P \neq \emptyset$,
(2) $\bigcup\{P \mid P \in \mathcal{P}\} = A$,
(3) für alle $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $P_1 \neq P_2$ gilt $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Wenn $\mathcal{P}$ eine Partition von A ist, so gibt es für jedes $a \in A$ genau ein $P \in \mathcal{P}$, sodass $a \in P$.

DEFINITION 10.7. Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A. Die *Faktormenge von A modulo ρ* ist die Menge

$$A/\rho := \{[a]_\rho \mid a \in A\}.$$

SATZ 10.8. *Sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann ist die Faktormenge von A bezüglich ρ eine Partition von A.*

Beweis: Sei $P \in A/\rho$. Dann gibt es ein $a \in A$, sodass $P = [a]_\rho = \{b \in A \mid (a, b) \in \rho\}$. Wegen der Reflexivität von ρ gilt $(a, a) \in \rho$, und folglich $a \in [a]_\rho$, also $a \in P$. Somit gilt $P \neq \emptyset$.

Wir zeigen nun, dass jedes $a \in A$ Element eines Elementes von A/ρ ist. Sei dazu $a \in A$. Dann gilt wegen der Reflexivität von ρ, dass $a \in [a]_\rho$. Somit ist a Element eines Elementes von A/ρ, nämlich von $[a]_\rho$.

Seien nun $P, Q \in A/\rho$. Seien $a, b \in A$ so, dass $P = [a]_\rho$ und $Q = [b]_\rho$. Wir nehmen nun an, dass $P \cap Q \neq \emptyset$. Es gibt dann also ein $c \in A$ mit $c \in P$ und $c \in Q$. Also gilt wegen $c \in [a]_\rho$ auch $(a, c) \in \rho$, und wegen $c \in [b]_\rho$ auch $(b, c) \in \rho$. Wegen der Symmetrie von ρ gilt daher auch $(c, b) \in \rho$, und daher, wegen der Transitivität von ρ, auch $(a, b) \in \rho$. Somit gilt nach Lemma 10.4 auch $P = Q$. ■

SATZ 10.9. *Sei A eine Menge, und sei $\mathcal{P}$ eine Partition von A. Dann ist*

$$\rho := \{(a, b) \in A \times A \mid \exists P \in \mathcal{P} : a \in P \text{ und } b \in P\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A.

SATZ 10.10. *Sei A eine Menge, sei $\mathbf{P}$ die Menge aller Partitionen auf A, und sei $\mathbf{E}$ die Menge aller Äquivalenzrelationen auf A. Dann sind die Abbildungen e und p, die durch*

$$\begin{array}{cccc} e : & \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ & \mathcal{P} & \longmapsto & \rho(\mathcal{P}) \end{array}$$

mit $\rho(\mathcal{P}) = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists P \in \mathcal{P} : a \in P \text{ und } b \in P\}$ und

$$\begin{array}{cccc} p : & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{P} \\ & \rho & \longmapsto & \{[a]_\rho \mid a \in A\} \end{array}$$

definiert sind, zueinander inverse Bijektionen.

Beweis: Wir zeigen, dass für jede Äquivalenzrelation ρ auf A gilt:

$$e(p(\rho)) = \rho. \tag{10.1}$$

Sei dazu $\rho \in \mathbf{E}$. Wir zeigen nun als erstes $\subseteq$ von (10.1), und nehmen dazu, dass $a, b \in A$ so sind, dass $(a, b) \in e(p(\rho))$. Dann gibt es ein $P \in p(\rho)$, sodass $a \in P$ und $b \in P$. Es gibt also ein $P \in \{[c]_\rho \mid c \in A\}$, sodass $a \in P$ und $b \in P$. Somit gibt es ein $c \in A$, sodass $a \in [c]_\rho$ und $b \in [c]_\rho$. Somit gilt $(c, a) \in \rho$ und $(c, b) \in \rho$, also $(a, b) \in \rho$. Das beweist $\subseteq$ von (10.1).

Sei nun $(a, b) \in \rho$. Dann gilt $b \in [a]_\rho$, und, wegen der Reflexivität von ρ, auch $a \in [a]_\rho$. Nun gilt $[a]_\rho \in p(\rho)$. Da a, b beide Elemente von $[a]_\rho$ sind, gilt $(a, b) \in e(p(\rho))$. Das beweist $\supseteq$ von (10.1).

Nun zeigen wir, dass für jede Partition $\mathcal{P}$ von A gilt:

$$p(e(\mathcal{P})) = \mathcal{P}. \tag{10.2}$$

Wir zeigen als erstes die Inklusion $\supseteq$ von (10.2). Sei dazu $P \in \mathcal{P}$, und sei $\sigma := e(\mathcal{P})$. Da P nicht leer ist, gibt es $a \in P$. Wir zeigen als erstes

$$P = [a]_\sigma. \tag{10.3}$$

Um $\subseteq$ von (10.3) zu zeigen, wählen wir $p \in P$. Dann gilt $a \in P$ und $p \in P$, also $(a, p) \in e(\mathcal{P}) = \sigma$. Somit gilt $p \in [a]_\sigma$. Um $\supseteq$ von (10.3) zu zeigen, wählen wir $q \in [a]_\sigma$. Es gilt dann also $(a, q) \in \sigma$. Folglich gibt es $Q \in \mathcal{P}$, sodass $a \in Q$ und $q \in Q$. Nun gilt $a \in P \cap Q$, also $P = Q$. Folglich gilt $q \in P$. Das beweist (10.3). Da $[a]_\sigma$ offensichtlich in $p(\sigma)$ liegt, gilt auch $P \in p(\sigma)$. Somit ist $\supseteq$ von (10.2) bewiesen.

Um $\subseteq$ von (10.2) zu zeigen, wählen wir $Q \in p(e(\mathcal{P}))$. Sei $\sigma := e(\mathcal{P})$. Dann gibt es ein $a \in A$, sodass $Q = [a]_\sigma$. Sei nun $P \in \mathcal{P}$ so, dass $a \in P$. Wir zeigen nun

$$P = Q. \tag{10.4}$$

Sei dazu $p \in P$. Dann gilt $(a, p) \in \sigma$. Folglich gilt $p \in [a]_\sigma$, also $p \in Q$. Sei nun $q \in Q$. Dann gilt $(a, q) \in \sigma$. Es gibt also ein $R \in \mathcal{P}$, sodass $a \in R$ und $q \in R$. Wegen $a \in R \cap P$ gilt $R = P$. Somit gilt $q \in P$. Das beweist (10.4). Somit gilt also auch $Q \in \mathcal{P}$; also gilt auch $\subseteq$ in (10.2).

Aus (10.1), (10.2) und Satz 5.27 erhalten wir nun, dass e und p zueinander inverse bijektive Abbildungen sind. ■

DEFINITION 10.11. Sei A eine Menge, und sei ρ eine Äquivalenzrelation auf A. Eine Teilmenge R von A ist ein *Repräsentantensystem* von A modulo ρ, wenn für alle $a \in A$ die Menge $[a]_\rho \cap R$ genau ein Element enthält.

Beispiel: Sei $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, und sei $(\binom{a}{b}, \binom{c}{d}) \in \rho$ genau dann, wenn $ad = bc$. Dann ist ρ eine Äquivalenzrelation, und $R := \{\binom{a}{b} \in A \mid b > 0, \mathrm{ggT}(a, b) = 1\}$ ist ein Repräsentantensystem. Die Faktormenge A/ρ bezeichnet man als die Menge der *rationalen Zahlen*. Für $[\binom{a}{b}]_\rho$ schreibt man $\frac{a}{b}$.

KAPITEL 11

Die Mächtigkeit von Mengen

1. Ordnungsrelationen

DEFINITION 11.1. Sei M eine Menge, und sei ρ eine Relation auf M. Die Relation ρ ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $(x, y) \in \rho$ und $(y, x) \in \rho$ gilt: $x = y$.

DEFINITION 11.2. Sei M eine Menge, und sei ρ eine Relation auf M. Die Relation ρ ist eine *Ordnungsrelation*, wenn sie *reflexiv*, *transitiv* und *antisymmetrisch* ist.

DEFINITION 11.3. Sei M eine Menge, und sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M. Die Relation $\leq$ ist *linear*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt, dass $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Ein Paar $(M, \leq)$ aus einer Menge und einer Ordnungsrelation bezeichnen wir als *geordnete Menge*. Wir schreiben auch $a < b$, wenn $a \leq b$ und $a \neq b$.

DEFINITION 11.4. Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, und sei $a \in M$.

(1) a ist ein *kleinstes Element* von M, wenn für alle $b \in M$ gilt: $a \leq b$.
(2) a ist ein *minimales Element* von M, wenn es kein $b \in M$ mit $b < a$ gibt.
(3) Sei T eine Teilmenge von M, und sei $m \in M$. Das Element m ist eine *untere Schranke für T*, wenn für alle $t \in T$ gilt: $m \leq t$. (Eine untere Schranke kann, aber muss nicht, in T liegen.)
(4) a is ein *größtes Element* von M, wenn für alle $b \in M$ gilt: $b \leq a$.
(5) a ist ein *maximales Element* von M, wenn es kein b in M mit $a < b$ gibt.
(6) Sei T eine Teilmenge von M, und sei $m \in M$. Das Element m ist eine *obere Schranke für T*, wenn für alle $t \in T$ gilt: $t \leq m$.

Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ hat höchstens ein kleinstes Element. Jedes kleinste Element ist minimal.

SATZ 11.5 (Lemma von Zorn). *Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge mit folgender Eigenschaft:*

> *Für alle Teilmengen T von M mit der Eigenschaft, dass $(T, \leq)$ linear geordnet ist, gibt es ein $m \in M$, sodass für alle $t \in T$: $t \leq m$.*

Dann hat M ein maximales Element.

Zur Formulierung: exakterweise muss es statt $(T, \leq)$ natürlich $(T, \leq \cap (T \times T))$ heißen. Die Forderung an M ist, dass jede linear geordnete Teilmenge T von M eine obere

Schranke besitzt, die zwar nicht in T, aber sehr wohl in M liegen muss. Der Beweis des Lemmas von Zorn ist aufwändig und benötigt das Auswahlaxiom.

Aus dem Lemma von Zorn werden wir nun folgern, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Manchmal ist es nützlich, als Basen für Vektorräume nicht nur *Folgen* von Vektoren, sondern auch einfach *Teilmengen* des Vektorraums zuzulassen; die Definitionen lassen sich rasch anpassen:

DEFINITION 11.6. Sei K ein Körper, und sei V ein Vektorraum über K. Eine Teilmenge B von V ist *linear unabhängig*, wenn für jede endliche Teilmenge W von B und für alle $\lambda : W \to K$ mit

$$\sum_{w \in W} \lambda(w)\, w = 0$$

gilt, dass für alle $w \in W$ gilt: $\lambda(w) = 0$. Die *lineare Hülle* der Menge B ist definiert als $\{\sum_{w \in W} \lambda(w)\, w \,|\, W \text{ ist endlich}, \lambda : W \to K\}$. Die Menge B ist eine *Basis für V*, wenn sie linear unbhängig ist, und ihre lineare Hülle ganz V.

LEMMA 11.7. *Sei V ein Vektorraum über dem Körper F, und sei*

$$\mathcal{U} := \{B \,|\, B \textit{ ist linear unabhängige Teilmenge von } V\}.$$

Jedes maximale Element aus $(\mathcal{U}, \subseteq)$ ist eine Basis von V.

Beweis: Sei B ein maximales Element von $(\mathcal{U}, \subseteq)$. Da $B \in \mathcal{U}$, ist B linear unabhängig. Wir zeigen nun, dass $L(B) = V$. Sei dazu $v \in V$; wir wollen zeigen, dass $v \in L(B)$. Wenn $v \in B$, so gilt klarerweise $v \in L(B)$. Wir betrachten nun den Fall $v \notin B$. Wir bilden $B' := B \cup \{v\}$. Wegen der Maximalität von B ist B' linear abhängig. Es gibt also eine endliche Teilmenge W von $B \cup \{v\}$ und $\lambda : W \to F$, sodass es $w \in W$ mit $\lambda(w) \neq 0$ gibt, und

$$\sum_{w \in W} \lambda(w)\, w = 0. \tag{11.1}$$

Wenn $v \notin W$ oder $\lambda(v) = 0$, so erhalten wir aus (11.1), dass B linear abhängig ist, im Widerspruch zu $B \in \mathcal{U}$. Somit gilt $v \in W$ und $\lambda(v) \neq 0$. Es gilt also

$$v = -\frac{1}{\lambda(v)} \sum_{w \in W \setminus \{v\}} \lambda(w)\, w,$$

und somit $v \in L(B)$.

Somit gilt $V = L(B)$. ■

SATZ 11.8. *Sei F ein Körper, und sei V ein Vektorraum über F. Dann besitzt V eine Basis.*

Beweis: Sei $\mathcal{U} := \{B \,|\, B \subseteq V, B \text{ ist linear unabhängig}\}$. Nach Lemma 11.7 genügt es zu zeigen, dass $(\mathcal{U}, \subseteq)$ ein maximales Element hat. Dazu verwenden wir das Zornsche Lemma. Sei $\mathcal{K}$ eine Teilmenge von $\mathcal{U}$, sodass $(\mathcal{K}, \subseteq)$ linear geordnet ist. Es gilt also für alle $K, L \in \mathcal{K}$: $K \subseteq L$ oder $L \subseteq K$. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{K}$ eine obere Schranke in $\mathcal{U}$ besitzt. Sei dazu $M := \bigcup\{K \mid K \in \mathcal{K}\}$, also die Vereinigung aller Elemente aus $\mathcal{K}$. Klarerweise ist M eine obere Schranke für $\mathcal{K}$. Es bleibt zu zeigen, dass $M \in \mathcal{U}$. Dazu ist zu zeigen, dass auch M linear unabhängig ist. Sei dazu W eine endliche nichtleere Teilmenge von M, und sei $\lambda : W \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\sum_{w \in W} \lambda(w)\, w = 0.$$

Da jedes $w \in W$ in M liegt, gibt es für jedes w ein $K_w \in \mathcal{K}$, sodass $w \in K_w$.

Nun gilt für jede endliche nichtleere Teilmenge $\mathcal{E}$ von $\mathcal{K}$, dass $\bigcup\{E \mid E \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{E}$. (Das kann man mit Induktion nach der Anzahl der Elemente von $\mathcal{E}$ zeigen. Die Beobachtung ist aber tatsächlich einfach: in einer endlichen linear geordneten Menge gibt es immer ein größtes Element.)

Wenn wir diese Beobachtung für $\mathcal{E} := \{K_w \mid w \in W\}$ verwenden, so erhalten wir, dass es ein $w_0 \in W$ gibt, sodass $W \subseteq K_{w_0}$. Da $K_{w_0} \in \mathcal{U}$, ist K_{w_0} linear unabhängig. Daher gilt für alle $w \in W$: $\lambda(w) = 0$.

Somit ist M linear unabhängig, und es gilt $M \in \mathcal{U}$.

Das Lemma von Zorn liefert nun, dass $(\mathcal{U}, \subseteq)$ zumindest ein maximales Element besitzt. ■

2. Mächtigkeit

DEFINITION 11.9. Seien A, B Mengen. Wir sagen, dass A und B *gleichmächtig* sind ($A \sim B$), wenn es eine bijektive Funktion von A nach B gibt.

SATZ 11.10. *Sei C eine Menge. Dann ist $\sim$ auf $\mathcal{P}(C)$ eine Äquivalenzrelation.*

PROPOSITION 11.11. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis: Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} -2x + 2 & \text{wenn } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

ist bijektiv. Ebenso ist

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & (x, y) & \longmapsto & 2^{x-1} \cdot (2y - 1) \end{array}$$

bijektiv. ■

DEFINITION 11.12. Eine Menge A ist *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $A \sim \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$. Eine Menge B ist *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Eine Menge ist *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

DEFINITION 11.13. Seien A, B Mengen. Wir sagen, dass B *mächtiger* als A ($A \precsim B$) ist, wenn es eine injektive Funktion von A nach B gibt.

ÜBUNGSAUFGABEN 11.14.

(1) Seien A, B Mengen mit $A \precsim B$. Zeigen Sie, dass es eine surjektive Funktion von B auf A gibt.
(2) Seien A, B Mengen, sodass es eine surjektive Funktion s von B auf A gibt. Zeigen Sie, dass dann $A \precsim B$. *Hinweis:* Verwenden Sie das Auswahlaxiom für $\prod_{a\in A} s^{-1}[\{a\}]$.
(3) Wir nehmen an, dass $A_1 \sim A_2$ und $B_1 \sim B_2$. Zeigen Sie, dass dann auch $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$ und $\mathcal{P}(A_1) \sim \mathcal{P}(A_2)$.
(4) Sei A eine Menge. Finden Sie eine bijektive Abbildung von $\mathcal{P}(A)$ nach $\{0, 1\}^A$.

Für jede Menge A gilt $A \precsim A$.

SATZ 11.15. *Seien A, B, C Mengen mit $A \precsim B$ und $B \precsim C$. Dann gilt $A \precsim C$.*

Beweis: Die Hintereinanderausführung injektiver Funktionen ist injektiv. ■

Nun überlegen wir uns, was passiert, wenn $A \precsim B$ und $B \precsim A$. Dazu beweisen wir zuerst folgendes Lemma.

LEMMA 11.16. *Sei Y eine Menge, und sei U eine Teilmenge von Y. Wir nehmen an, dass es eine injektive Funktion $g : Y \to U$ gibt. Dann sind Y und U gleichmächtig.*

Beweis: Sei $V := Y \setminus U$, und

$$U_1 := \bigcap\{B \subseteq U \mid g[V \cup B] \subseteq B\}.$$

Wir zeigen nun

$$g[V \cup U_1] \subseteq U_1. \tag{11.2}$$

Sei dazu $w \in V \cup U_1$. Wir wollen zeigen, dass $g(w) \in \bigcap\{B \mid B \subseteq U$ und $g[V \cup B] \subseteq B\}$. Dazu zeigen wir, dass $g(w)$ in jeder Teilmenge B von U mit $g[V \cup B] \subseteq B$ liegt. Sei also $B \subseteq U$ so, dass $g[V \cup B] \subseteq B$. Wegen $U_1 \subseteq B$ gilt auch $w \in V \cup B$. Daher gilt $g(w) \in g[V \cup B]$, und somit $g(w) \in B$. Somit gilt (11.2).

Nun zeigen wir

$$g[V \cup U_1] = U_1. \tag{11.3}$$

Nehmen wir nun an, dass $g[V \cup U_1] \neq U_1$. Dann gibt es ein $u_1 \in U_1$, sodass $u_1 \notin g[V \cup U_1]$. Dann gilt $g[V \cup (U_1 \setminus \{u_1\})] \subseteq U_1 \setminus \{u_1\}$. Somit ist $B := U_1 \setminus \{u_1\}$ eine der Mengen, die bei der Bildung von U_1 geschnitten wurden. Also gilt $u_1 \notin U_1$, im Widerspruch zur Wahl von u_1. Somit gilt (11.3).

Somit ist $g|_{V\cup U_1}$ eine bijektive Funktion von $V \cup U_1$ nach U_1. Da $Y = V \cup U = (V \cup U_1) \cup (U \setminus U_1)$ und $U = U_1 \cup (U \setminus U_1)$, ist $h := g|_{V\cup U_1} \cup \mathrm{id}_{U\setminus U_1}$ eine bijektive Funktion von Y nach U. ■

SATZ 11.17 (Satz von Schröder-Bernstein). *Seien A, B Mengen mit $A \precsim B$ und $B \precsim A$. Dann gilt $A \sim B$.*

Beweis: Sei $f : A \to B$ injektiv und $g : B \to A$ injektiv. Dann ist $f \circ g$ eine injektive Funktion, und es gilt $f \circ g[B] \subseteq f[A]$.

Sei nun $Y := B$ und $U := f[A]$. Nun ist $f \circ g$ eine injektive Funktion von Y nach U. Nach Lemma 11.16 gibt es eine bijektive Funktion $h : Y \to U$. Nun ist f bijektiv von A nach $f[A]$, und h^{-1} bijektiv von $f[A]$ nach B, also ist $h^{-1} \circ f$ bijektiv von A nach B. Somit gilt $A \sim B$. ■

3. Einige abzählbar unendliche Mengen

SATZ 11.18. *Es gilt* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Beweis: Nach dem Satz von Schröder-Bernstein genügt es $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$ zu zeigen. Klarerweise ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, x \mapsto \frac{x}{1}$ injektiv, also gilt $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$.

Wir bilden nun eine injektive Abbildung $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ durch

$$g(\frac{a}{b}) := (a/\mathrm{ggT}(a,b), b/\mathrm{ggT}(a,b)),$$

wenn $b > 0$. Diese Abbildung ist wohldefiniert und injektiv. Da $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, gibt es eine injektive Abbildung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, und somit gilt $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$. (Ebenso ist $h : \mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \to \mathbb{Q}, (a,b) \mapsto \frac{a}{b}$ surjektiv auf $\mathbb{Q}$. Unter Verwendung des Auswahlaxioms gilt also deshalb $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, und folglich $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N}$.) ■

SATZ 11.19. *Sei $\langle A_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ eine Familie von Mengen. Wir nehmen an, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt : $A_i \precsim \mathbb{N}$. Dann gilt auch* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \precsim \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ injektiv. Wir bilden nun $f : \bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $f(a) := (k_1, k_2)$, wobei $k_1 := \min\{j \in \mathbb{N} \mid a \in A_j\}$ und $k_2 := f_{k_1}(a)$. Diese Abbildung ist injektiv und beweist $\bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N}$ folgt die Behauptung. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 11.20.

(1) Zeigen Sie, dass für jedes a mit $a \notin \mathbb{N}$ die Menge $\{a\} \cup \mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Vereinigung einer abzählbar unendlichen mit einer endlichen Menge abzählbar unendlich ist.
(3) Zeigen Sie, dass eine Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen abzählbar ist, indem Sie eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf diese Menge definieren.
(4) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{N}^n$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
(5) Zeigen Sie, dass für nichtleere abzählbare Menge A die Menge $A^* := \bigcup\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar unendlich ist.
(6) Zeigen Sie, dass die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

4. Einige überabzählbar unendliche Mengen

Eine Menge C ist *überabzählbar unendlich*, wenn C unendlich und nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Zunächst überlegen wir uns, warum es solche Mengen gibt.

LEMMA 11.21. *Sei A eine Menge. Dann gibt es keine surjektive Funktion von A auf $\mathcal{P}(A)$.*

Beweis: Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Wir zeigen, dass f nicht surjektiv auf $\mathcal{P}(A)$ sein kann.

Wir betrachten dazu
$$B := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$
Wir zeigen nun, dass B nicht im Wertebereich von f liegt. Dazu zeigen wir, dass für alle $a \in A$ gilt: $f(a) \neq B$. Sei also $a \in A$.

- *1.Fall: $a \in f(a)$.* Wenn $a \in f(a)$, so gilt $a \notin B$. Das Element a liegt also in $f(a)$, aber nicht in B. Somit gilt $f(a) \neq B$.
- *2. Fall: $a \notin f(a)$.* Wenn $a \notin f(a)$, so gilt $a \in B$. Das Element a liegt also in B, aber nicht in $f(a)$. Somit gilt $f(a) \neq B$.

B liegt also nicht im Wertebereich von f; somit ist f nicht surjektiv auf $\mathcal{P}(A)$. ■

Somit gilt:

SATZ 11.22 (Satz von Cantor). *Sei A eine Menge. Dann gilt $A \precsim \mathcal{P}(A)$, und $A \nsim \mathcal{P}(A)$.*

Beweis: Die Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $a \mapsto \{a\}$ ist injektiv, also gilt $A \precsim \mathcal{P}(A)$.

Wenn $A \sim \mathcal{P}(A)$, so gibt es eine bijektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(A)$. Diese Abbildung ist surjektiv auf $\mathcal{P}(A)$, im Widerspruch zu Lemma 11.21. Also gilt $A \nsim \mathcal{P}(A)$. ■

Nach dem Satz von Cantor ist also $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar.

SATZ 11.23. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, also überabzählbar.*

Beweis: Die Funktion $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $I \mapsto \sum_{i \in I} 10^{-i}$ ist injektiv und belegt $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$.

Sei nun q eine bijektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$. Wir schreiben für $q(i)$ kurz q_i. Dann ist $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $r \mapsto \{i \in \mathbb{N} \mid q_i < r\}$ injektiv, da zwischen zwei verschiendenen reellen Zahlen stets eine rationale Zahl liegt.

Somit gilt nach dem Satz von Schröder-Bernstein $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. ■

5. Unendliche Mengen

In dieser Sektion stellen wir noch einige Sätze über unendliche Mengen zusammen. Diese Sätze haben gemeinsam, dass man für die Beweise das Auswahlaxiom benötigt.

SATZ 11.24. *Jede unendliche Menge M enthält eine abzählbar unendliche Teilmenge.*

Beweis: Sei $f : \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M$ so, dass $f(A) \in A$ für alle $A \subseteq M$. So ein f existiert, weil nach dem Auswahlaxiom die Menge $\prod_{A \in \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}} A$ nicht leer ist.

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M. Wir definieren eine Funktion $E : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ rekursiv. Da M nicht leer ist, können wir können wir $E(1) := \{f(M)\}$ definieren, und für alle $n \in \mathbb{N}$: $E(n + 1) = E(n) \cup \{f(M \setminus E(n))\}$.

Sei nun $g : \mathbb{N} \to M$ definiert durch $g(n) := f(M \setminus E(n))$. Wir zeigen nun, dass g injektiv ist. Sei $n_1 < n_2$. Es gilt $g(n_2) = f(M \setminus E(n_2)) \notin E(n_2)$. Da $g(n_1) = f(M \setminus E(n_1))$, gilt $g(n_1) \in E(n_1) \cup \{f(M \setminus E(n_1))\}$, also $g(n_1) \in E(n_1 + 1)$, und somit $g(n_1) \in E(n_2)$. Also gilt $g(n_1) \neq g(n_2)$. Folglich ist $g[\mathbb{N}]$ eine abzählbare Teilmenge von M. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 11.25.

(1) Sei A unendlich und E endlich. Zeigen Sie $A \cup E \sim A$. *Hinweis:* Benutzen Sie eine abzählbare Teilmenge B von A und verwenden Sie $B \cup E \sim B$.
(2) Sei B unendlich. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f : B \to B$ gibt, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. *Hinweis:* Lösen Sie das Beispiel zuerst für $B := \mathbb{N}$.
(3) Zeigen Sie $[0, 1] \sim]0, 1[\sim \mathbb{R}$.

SATZ 11.26 (Vergleichbarkeitssatz). *Seien A, B Mengen. Dann gilt $A \precsim B$ oder $B \precsim A$.*

Sei

$$\mathcal{F} := \{f \subseteq A \times B \mid \text{es gibt } C \subseteq A, \text{ sodass } f \text{ eine injektive Funktion von } C \text{ nach } B \text{ ist.}\}$$

Mit dem Lemma von Zorn kann man zeigen, dass $(\mathcal{F}, \subseteq)$ ein maximales Element f_0 besitzt. Wenn der Definitionsbereich C von f_0 gleich A ist, so gilt $A \precsim B$.

Wenn f_0 surjektiv auf B ist, so ist f_0 eine bijektive Funktion von C nach B; also ist f_0^{-1} injektiv von B nach C, und es gilt $B \precsim A$.

Wenn $C \neq A$ und $f_0[C] \neq B$, so wählen wir $a \in A \setminus C$ und $b \in B \setminus f_0[C]$. Dann ist $f_0 \cup \{(a, b)\}$ ebenfalls injektiv, im Widerspruch zur Maximalität von f_0. ■

SATZ 11.27. *Seien A, B Mengen mit $A \precsim B$. Wir nehmen an, dass B unendlich ist. Dann gilt*

(1) *$A \cup B \sim B$;*
(2) *Wenn A nicht leer ist, so gilt $A \times B \sim B$;*
(3) *Wenn A zumindest zwei Elemente enthält, so gilt $A^B \sim \mathcal{P}(B)$.*

Beweis: [**Halmos, 1976**, Kapitel 24]. ■

ÜBUNGSAUFGABEN 11.28.

(1) Zeigen Sie $\mathbb{N}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
(2) Zeigen Sie $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$. *Hinweis:* Finden Sie eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}(N)^{\mathbb{N}}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Auf Satz 11.27 aufbauend kann man nun beweisen, dass alle Basen eines Vektorraums gleichmächtig sind.

SATZ 11.29 (Dimensionssatz für Vektorräume). *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und seien B und C Basen von V. Dann gilt $B \sim C$.*

6. Erstaunliches über Mengen

SATZ 11.30. *Sei A eine Menge, und sei $B := \{a \in A \mid a \notin a\}$. Dann gilt $B \notin A$.*

Beweis: Nehmen wir an, dass $B \in A$.

- *1.Fall:* $B \notin B$: Dann gilt $B \in A$ und $B \notin B$. Also gilt $B \in B$, im Widerspruch zur Fallannahme. Dieser Fall kann also nicht auftreten.
- *2. Fall:* $B \in B$: Dann erfüllt B die Eigenschaft, die unter den Elementen von A jene in B auswählt; es gilt also $B \notin B$, im Widerspruch zur Fallannahme.

Somit ist die Annahme $B \in A$ falsch; es gilt also $B \notin A$. ∎

Damit gibt es auch keine Menge, die alle Mengen als Elemente enthalten würde: jede Menge M enthält zumindest die Menge $\{m \in M \mid m \notin m\}$ nicht als Element. Der Begriff "die Menge aller Mengen" ist also widersprüchlich, weil er von einem Objekt, das es nicht gibt, nämlich einer Menge aller Mengen, so spricht, als ob es dieses Objekt gäbe. Dass es eine "Menge aller Mengen" nicht gibt, ist das *Russell'sche Paradoxon*.

Eine berühmte Vermutung (die Kontinuumshypothese) sagt, dass folgende Frage die Antwort "ja" hat.

PROBLEM 11.31. *Gilt für jede unendliche Teilmenge A von $\mathbb{R}$: $A \sim \mathbb{R}$ oder $A \sim \mathbb{N}$?*

K. Gödel zeigte, dass die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre, wenn widerspruchsfrei, auch unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms nicht erlauben, die Antwort "nein" herzuleiten. P. Cohen zeigte, dass die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre und das Auswahlaxiom, wenn widerspruchsfrei, nicht erlauben, die Antwort "ja" herzuleiten.

Literaturverzeichnis

[Halmos, 1976] Halmos, P. R. (1976). *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. Vierte Auflage, Aus dem Englischen übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 6.

ANHANG A

Programme, die vorrechnen

Die Mathematica-Files `GaussDemo6.m` und `RowRed9.m` enthalten Mathematica-Funktionen, die folgende Probleme mit Zwischenschritten vorrechnen:

- Lösen eines linearen Gleichungssystems (`Gauss[A,b]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonForm[A]`).
- Bestimmen einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform, die den gleichen Zeilenraum wie die eingegebene Matrix hat (`RowEchelonNormalForm[A]`).
- Bestimmen der Determinante einer Matrix (`DeterminantenDemo[A]`).

Die Programme können von Mathematica aus mit `<< GaussDemo6.m` und `<< RowRed9.m` geladen werden.
Sie sind auf `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/MathInf/vlws05/MathematicaProgramme/` erhältlich und werden den Studierenden ausschließlich für die Nutzung im Rahmen des Kurses "Lineare Algebra" zur Verfügung gestellt.