

**Übungen zu  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1  
9. Übungsblatt für den 11. Jänner 2010**

- Bestimmen Sie eine ONB der Ebene in  $\mathbb{R}^3$  die durch  $3x + 2y + z = 0$  gegeben ist.
- Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  auf die Ebene in  $\mathbb{R}^3$  die durch  $x + y + z = 0$  gegeben ist.
- Welcher Punkt in

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 10x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \text{ und } x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\}$   
hat vom Punkt  $(1, 1, 1, 1)$  den geringsten Abstand?

- Sei  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $(b_1, \dots, b_k)$  eine ONB von  $U$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ .
  - Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion  $P_U(x)$  von  $x$  auf  $U$  gegeben ist durch

$$P_U(x) = \sum_{i=1}^k \langle b_i, x \rangle b_i.$$

*Bemerkung:* Ist  $U = \mathbb{R}^n$ , dann ist  $P_U(x) = x$  und man erhält die Aussage aus Satz 7.11 aus der Vorlesung.

- Sei  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq (0, \dots, 0)$ , und sei  $U = L(v)$  (d.h.  $U$  ist eine Gerade in  $\mathbb{R}^n$  mit Richtungsvektor  $v$ ). Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion von  $x \in \mathbb{R}^n$  auf  $U$  gegeben ist durch

$$P_U(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

*Bemerkung:* Also die allgemeine Definition der orthogonalen Projektion stimmt mit der Projektionseigenschaft des Skalarprodukts aus Kapitel 1 der Vorlesung überein.

- Folgern Sie aus (a), dass  $\|P_U(x)\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle b_i, x \rangle|^2$ .
- Sei  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion auf  $U$  eine lineare Abbildung ist, d.h. für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt  $P_U(\lambda x + \mu y) = \lambda P_U(x) + \mu P_U(y)$ . Zeigen Sie weiters, dass  $P_U \circ P_U = P_U$  ("Idempotenz").
  - Sei  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .
    - Zeigen Sie, dass  $\|P_U(x)\| \leq \|x\|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .
    - Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  orthogonal. Sind dann auch  $P_U(x)$  und  $P_U(y)$  orthogonal?
  - Für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$$

und sei  $P = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie, dass

$$\text{dist}(P, M) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- Sei  $M_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  und sei  $M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ . Bestimmen Sie jene Punkte auf  $M_1$  und  $M_2$  die voneinander den geringsten Abstand haben.