Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
8. Übungsblatt für den 14.12.2009

1. Sei $U = L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ und $V = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$.
   (a) Bestimmen Sie Matrizen A und B, sodass $N(A) = U$ und $N(B) = V$.
   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.

2. Bestimmen Sie eine Basis von $U+V$ wobei $U = \{x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und $V = \{x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

3. Seien a, b Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: a und b sind linear abhängig genau dann wenn der Winkel zwischen a und b entweder $0°$ oder $180°$ beträgt. (Hinweis: Da n nicht notwendigerweise kleiner oder gleich 3 ist, ist eine geometrische Argumentation nicht zulässig! Arbeiten Sie mit der Definition des Cosinus des Winkels zwischen 2 Vektoren.)

4. (a) Finden Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ die den Vektor $a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ enthält. (Hinweis: Finden Sie zunächst einen Vektor b der senkrecht auf a steht. Verwenden Sie zum Beispiel anschließend das Kreuzprodukt um einen Vektor zu finden der auf 2 gegebene Vektoren senkrecht steht. Sie können auch das Orthonormalisierungsverfahren von Gram - Schmidt verwenden.)
   (b) Berechnen Sie die Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} 124 \\ 345 \\ -22.5 \end{pmatrix}$ bezüglich ihrer Orthonormalbasis.

5. Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $< u, v >= \sum_{i=1}^n < u, b_i >< v, b_i >$.

6. Sei $S := \{s_1, \ldots, s_n\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$. S heißt Orthonormalsystem wenn die Vektoren in S Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind (S ist nicht notwendigerweise eine Basis). Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $w := v - \sum_{i=1}^n < v, s_i > s_i$. Zeigen Sie $< w, s_j >= 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

7. Sei $S := \{s_1, \ldots, s_n\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $\sum_{i=1}^{n} < v, s_i >^2 \leq < v, v >$ (sogenannte Besselsche Ungleichung).

   Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

   $$v = \sum_{i=1}^{n} < v, s_i > s_i + (v - \sum_{j=1}^{n} < v, s_j > s_j)$$

   und Beispiel 6.

   Anmerkung: Die Gleichheit in der Ungleichung gilt übrigens genau dann wenn $v \in L(S)$.

8. Orthonormalisieren Sie die Familie $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$ von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

9. Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis für folgende Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie dazu zuerst eine Basis der Unterräume und verwenden Sie anschließend das Verfahren von Gram - Schmidt.

   (a) $U = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$.

   (b) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \text{ und } x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}$