Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
7. Übungsblatt für den 7.12.2009

1. Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$ mit der Basis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

   (a) $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ ist keine Basis von U.

   (b) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ ist keine Basis von U.

2. Wir betrachten in diesem Beispiel den Vektorraum V aller reellen Zahlenfolgen über $\mathbb{R}$, also $V := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   Wir werden als Basen für Vektorräume nicht nur *Folgen* von Vektoren, sondern auch einfach *Teilmengen* des Vektorraums zulassen.

   Eine Teilmenge B von V ist *linear unabhängig*, wenn für jede endliche Teilmenge W von B und für alle $\lambda : W \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{w \in W} \lambda(w)\, w = 0$ gilt, dass für alle $w \in W : \lambda(w) = 0$.

   Die *lineare Hülle* der Menge B ist definiert als

   $$L(B) := \{ \sum_{w \in W} \lambda(w)\, w \mid W \text{ ist endlich}, \lambda : W \to \mathbb{R} \}.$$

   Die Menge B ist eine *Basis für* V, wenn sie linear unbhängig ist, und ihre lineare Hülle ganz V.

   Mit e_i, $i \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir jenen Vektor in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dessen i-ter Eintrag 1 ist, und dessen andere Einträge alle 0 sind.

   (a) Zeigen Sie, dass $B := \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

   (b) Ist B eine Basis von V? (Hinweis: Jedes Element muss als endliche Linearkombination von Basisvektoren darstellbar sein.)

   (c) Kann der Vektorraum V endlichdimensional sein?

   (d) (freiwillige Zusatzfrage) Hat V eine Basis?

3. Eine Ebene e in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $e = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$. $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ ist eine Basis von e. $C = (\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix})$ ist eben-

falls eine Basis von e. Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(v)_B$. Berechnen Sie, falls möglich, $(w)_B$ für $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Gilt $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$? Finden Sie außerdem jeweils eine Basis für die Unterräume.

5. Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrizen $(A\ b_1)$ und $(A\ b_2)$

   (b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme $A \cdot x = b_i$ $(i \in \{1, 2\})$ und geben Sie die Lösungsmengen in der Form $x_0 + N(A)$ an, wobei x_0 eine spezielle Lösung bezeichnet.

6. Seien $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $L(P, Q, R)$.

   (b) Finden Sie eine Matrix A, sodass $L(P, Q, R) = N(A)$.

7. Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und $V := \{x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Bestimmen Sie eine Basis für U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

8. Sei $U := L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ und $V := L(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$. Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $U \cap V$.