

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
6. Übungsblatt für den 30. November 2009**

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie eine Matrix B in Zeilenstufenform, sodass $Z(A) = Z(B)$.

(b) Berechnen Sie eine Matrix B in Zeilenstufennormalform, sodass $Z(A) = Z(B)$.

2. Zeigen Sie: Es gilt $L(v_1, \dots, v_n, w) = L(v_1, \dots, v_n)$ genau dann, wenn $w \in L(v_1, \dots, v_n)$.

3. Seien U und V Teilräume des \mathbb{R}^n mit $U \subseteq V$. Zeigen Sie, dass dann $V^\perp \subseteq U^\perp$.

4. Sei U ein Teilraum des \mathbb{R}^n .

(a) Zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass $(U^\perp)^\perp \supseteq U$ und verwenden Sie dann $\dim U + \dim U^\perp = n$.

(b) Zeigen Sie, dass $U \cap U^\perp = \{0\}$.

5. Sei U ein Teilraum des \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie, dass jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ als $v = a + b$ mit $a \in U$ und $b \in U^\perp$ dargestellt werden kann. *Hinweis:* Verwenden Sie orthogonale Projektion.

6. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement U^\perp von

(a) $U = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

(b) $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ und } x - y + z = 0\}$.

7. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme indem Sie die zugehörigen Matrizen in Zeilenstufennormalform bringen:

(a)

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ 2x & + & 6y & + & 2z & = & 22. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rclclcl} & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 1. \end{array}$$

8. Finden Sie einen Vektor, der nicht in $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ liegt.