

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
5. Übungsblatt für den 23. November 2009**

1. Testen Sie jeweils, ob folgende Folgen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$

(d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -25 \end{pmatrix}.$

2. (Lineare Hülle)

(a) Gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in L(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix})?$

(b) Gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \in L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix})?$

(c) Liegt $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$

3. Welche der Mengen $M_1 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$, $M_2 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_2\}$, $M_3 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdots x_n = 0\}$ bildet einen Unterraum des \mathbb{R}^n ?

4. (a) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum U des \mathbb{R}^4 , der durch

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben ist.

- (b) Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum U des \mathbb{R}^5 , der durch $U = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^5 x_i = 0\}$ gegeben ist.

5. Finden Sie eine Teilmenge T des \mathbb{R}^3 , die die Eigenschaft $\forall t \in T \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha t \in T$ erfüllt und die Eigenschaft $\forall s, t \in T : s + t \in T$ nicht erfüllt.

6. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien U, V, W Unterräume des \mathbb{R}^n . Zeigen Sie:

(a) Falls $W = U \cup V$, dann gilt entweder $U = W$ oder $V = W$.

(b) Der Durchschnitt $U \cap V \cap W$ ist ein Unterraum des \mathbb{R}^n .

7. Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie $L(5v_1 + 3v_2, 2v_1 + 2v_2) = L(v_1, v_2)$.

8. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $V := \mathbb{R}^n$, und seien $v_1, v_2 \in V$. Bestimmen Sie, für welche $(v_1, v_2) \in V^2$ die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V, \\ (a, b) \longmapsto a v_1 + b v_2$$

injektiv ist.