

**Übungen zu  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1  
4. Übungsblatt für den 16. November 2009**

1. (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 2$ . Zeigen Sie, dass  $f$  bijektiv ist, und bestimmen Sie die inverse Funktion  $f^{-1}$ . Geben Sie für  $y \in \mathbb{R}$  den Funktionswert  $f^{-1}(y)$  an.
- (b) Sei  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ .
  - i. Ist  $f$  injektiv?
  - ii. Ist  $f$  surjektiv?
2. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier surjektiver Funktionen wieder surjektiv ist.
3. Sei  $f$  die Funktion, die durch

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ x \longmapsto \frac{x+2}{x-3}$$

gegeben ist.

- (a) Ist  $f$  injektiv?
  - (b) Ist  $f$  surjektiv?
  - (c) Berechnen Sie, wenn möglich, die inverse Funktion  $f^{-1}$ . Geben Sie den Funktionswert  $f^{-1}(y)$  für jedes  $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  an!
4. Seien  $A, B, C$  Mengen mit  $A \neq \emptyset$ , und sei  $f : B \rightarrow C$ . Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind.
    - (a)  $f$  ist injektiv.
    - (b) Für alle  $g, h : A \rightarrow B$  gilt:  $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ .

*Hinweis:* Nehmen Sie für den Beweis von (b) $\implies$ (a) an, dass  $f$  nicht injektiv ist. Benutzen Sie  $x, y \in B$  mit  $f(x) = f(y)$  und  $x \neq y$  dazu,  $g$  und  $h$  von  $A$  nach  $B$  zu konstruieren, sodass  $f \circ g = f \circ h$ , aber  $g \neq h$ .

5. Seien  $A, B, C$  Mengen, sei  $f$  eine surjektive Funktion von  $A$  nach  $B$ , und seien  $g : B \rightarrow C$  und  $h : B \rightarrow C$  so, dass  $g \circ f = h \circ f$ . Zeigen Sie, dass  $g = h$ .
6. Geben Sie, wenn möglich, jeweils ein Element aus folgenden Mengen an:
  - (a)  $A = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ ,
  - (b)  $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

7. Geben Sie, wenn möglich, jeweils ein Element aus folgenden Mengen an:

- (a)  $A = \prod_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{N} \mid x > r\}$ ,
- (b)  $B = \prod_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < (r - 3)^2\}$ ,
- (c)  $C = \prod_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq (r - 3)^2\}$ .

8. Sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann injektiv ist, wenn es ein  $x : B \rightarrow A$  gibt, sodass  $x \circ f = \text{id}_A$ .