

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
3. Übungsblatt für den 9. November 2009**

1. Berechnen Sie $(A - B) \cdot C^T$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Finden Sie eine Matrix X , sodass $A \cdot X = B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Bestimmen Sie jede Spalte von X durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.)

Gibt es für jede 2×2 -Matrix $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Matrix X mit $A \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$?

3. (a) Seien B, C beide 3×3 -Matrizen, und sei $A := (B \cdot C)^T$. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $A(i, j)$ in der Form

$$A(i, j) = \sum_{k=?}^? B(?, ?)C(?, ?).$$

- (b) Seien A, B beide $n \times n$ -Matrizen, und sei $C := B^T \cdot A$. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $C(i, j)$ in der Form

$$C(i, j) = \sum_{k=?}^? A(?, ?)B(?, ?).$$

4. Bestimmen Sie, wenn möglich, jeweils die inverse Matrix folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sei A eine $m \times m$ -Matrix mit Einträgen aus \mathbb{R} , für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt, und sei E die $m \times m$ -Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist. *Hinweis:* Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

6. (a) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems parametrisiert an.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 12 \\ 1x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 &= 4 \\ 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 &= 14. \end{aligned}$$

- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 14 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ -2 & -6 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & -25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie eine Matrix B in Zeilenstaffelform, sodass $B \cdot x = 0$ die gleiche Lösungsmenge wie $A \cdot x = 0$ hat.
 (b) Geben Sie die Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$ parametrisiert an.

8. Seien A, B Mengen.

- (a) Zeigen Sie $A \setminus (A \Delta B) = A \cap B$.
 (b) Zeigen (oder widerlegen) Sie, dass $A \Delta B$ genau dann leer ist, wenn $A = B$.

9. Geben Sie ein Beispiel für Mengen A, B , für eine Funktion $f : A \rightarrow B$, und für Teilmengen C, D von A an, sodass $f[C \cap D] \neq f[C] \cap f[D]$.
 10. Sei $M := \mathbb{N} \setminus \{1\}$, also $M = \{2, 3, \dots\}$. Für $n, x \in M$ sei $F(n, x)$ folgende Menge von Funktionen von M nach M :

$$F(n, x) = \{f : M \rightarrow M \mid f(x) \geq x^n\}.$$

- (a) Geben Sie, wenn möglich, eine Funktion an, die in $F(3, 4)$ liegt.
 (b) Geben Sie, wenn möglich, eine Funktion an, die in $\bigcap_{n \in M} F(n, 4)$ liegt.
 (c) Geben Sie, wenn möglich, eine Funktion an, die in $\bigcup_{x \in M} (\bigcap_{n \in M} F(n, x))$ liegt.
 (d) Geben Sie, wenn möglich, eine Funktion an, die in $\bigcap_{n \in M} (\bigcup_{x \in M} F(n, x))$ liegt.