Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
2. Übungsblatt für den 19. Oktober 2009

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie
   (a) $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$,
   (b) $a \times b = -(b \times a)$,
   (c) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $a \times b$ genau dann 0 ist, wenn $a = 0$ oder b ein Vielfaches von a ist.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie
$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$
   Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch? Für welche a, b gilt Gleichheit?

4. (a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\|a \times b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.
   (b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}^3$, sodass $\|a \times b\| < \|a\| \cdot \|b\|$.
   (c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, sodass $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\|$.
   (d) Für welche $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\|$?

5. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Als das *von a, b, c aufgespannte Parallelepiped* bezeichnen wir den "verzogenen Quader" mit den Eckpunkten $0, a, a+b, b, c, c+a, c+a+b, c+b$.
   (a) Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Parallelepipeds durch $V = |\langle a \times b,\, c\rangle|$ gegeben ist.
   (b) Was sagt das Vorzeichen von $\langle a \times b,\, c\rangle$ über die Lage von a, b, c aus?
   (c) Bei der Schokoladenproduktion wird flüssige Schokoladenmasse mit Geschwindigkeit $v = 40\,\mathrm{cm/s}$ in Richtung $(1, 1, 1)$ durch ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ und $C = (3, 3, 3)$ [Einheiten in cm] gepresst. Welches Schokoladenvolumen wird in $1\,\mathrm{s}$ erzeugt?

6. (a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Wir nehmen an, dass es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $c = \lambda a + \mu b$. Zeigen Sie, dass $\langle a \times b, c\rangle = 0$.
   (b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ so, dass $\langle a \times b, c\rangle = 0$. Muss es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geben, sodass $c = \lambda a + \mu b$?

7. Gegeben seien die beiden Ebenen $\epsilon_1 : y - z = 0$ und $\epsilon_2 : x + y + z = 0$.
   (a) Wandeln Sie die beiden Ebenen in die Parameterform um.
   (b) Die beiden Ebenen bilden eine Rinne, in die eine Kugel gelegt wird. In welche Richtung rollt die Kugel?

8. Gegeben sei die Ebene $\epsilon : x + 2y + 2z = 12$. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden $g : \left(\begin{smallmatrix}11\\-2\\10\end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix}9\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$ auf die Ebene zuläuft, wird an der Ebene reflektiert.
   (a) In welchem Punkt trifft der Lichtstrahl auf die Ebene?
   (b) Unter welchem Winkel zur Ebene fällt der Lichtstrahl ein?
   (c) Auf welcher Geraden verläuft der reflektierte Strahl?

   (Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.10)