Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
11. Übungsblatt für den 25. Jänner 2010

1. Seien U, V Vektorräume über $\mathbb{R}$, sei h eine lineare Abbildung von U nach V, und seien $u_1, \dots, u_n, v \in U$. Zeigen Sie:

   (a) Wenn $(u_1, \dots, u_n)$ linear abhängig ist, so ist auch $(h(u_1), \dots, h(u_n))$ linear abhängig.

   (b) Wenn $v \in L(u_1, \dots, u_n)$, so gilt auch $h(v) \in L(h(u_1), \dots, h(u_n))$.

   Gelten die Umkehrungen auch für alle Vektorräume U, V?

2. (a) Ist die Abbildung g, die jeden Vektor $\vec{v}$ des $\mathbb{R}^2$ auf denjenigen Punkt der Geraden mit der Gleichung $2x - y = 3$ abbildet, der von $\vec{v}$ den kürzesten Abstand hat, eine lineare Abbildung?

   (b) Ist die Abbildung h, die jeden Vektor $\vec{v}$ des $\mathbb{R}^2$ auf denjenigen Punkt der Geraden mit der Gleichung $2x - y = 0$ abbildet, der von $\vec{v}$ den kürzesten Abstand hat, eine lineare Abbildung?

3. Gegeben ist folgende lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x+z \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$

   Sei

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

   und sei

$$C = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(B, C)$.

4. Eine lineare Abbildung h von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ bildet die Vektoren der Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ auf die zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (in dieser Reihenfolge) ab. Bestimmen Sie $h\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

5. Die Ebene ε hat die Basen

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

   und

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

   (a) Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A!

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T, sodass für alle $v \in \varepsilon$ gilt:

$$(v)_A = T \cdot (v)_B.$$

6. (Spiegelung an einer Geraden in der Ebene) Wir bezeichnen mit σ jene Spiegelung, die jeden Punkt der Ebene $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $-3\,x + 4\,y = 0$ spiegelt.

   (a) Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$, sodass für die Abbildungsmatrix $S_\sigma(B, B)$ der Spiegelung σ bezüglich der Basis B folgende Gleichung gilt.
   $$S_\sigma(B, B) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

   (b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $S_\sigma(E, E)$ der Spiegelung σ bezüglich der kanonischen Basis E.

   (c) Wo landet der Punkt (a, b) nach dieser Spiegelung σ?

7. Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x+2\,y+2\,z = 0$ spiegelt. Berechnen Sie $S_h(E, E)$.

8. (Drehung um eine Gerade im Raum) Wo landet der Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ nach der Drehung δ um $90°$ um die Gerade g, die durch
   $$g : X = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$$
   gegeben ist? Dabei drehen wir *gegen den Uhrzeigersinn*, wenn man von $\left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ in Richtung $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ schaut. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser Drehung bezüglich der kanonischen Basis!