

**Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
10. Übungsblatt für den 18. Jänner 2010**

1. Finden Sie die bestapproximierende Lösung des überbestimmten Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie die Projektion von $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $W = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sowie auf W^\perp und stellen Sie das Ergebnis als Summe von Vektoren aus W und aus W^\perp dar.

3. Gegeben seien die beiden Geraden $g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die beiden nächstliegenden Punkte der Geraden und deren Abstand.

Bemerkung zu den Beispielen 4-6: Zitieren Sie für jeden Zwischenschritt den verwendeten Satz oder die verwendete Definition. Eine scheinbar triviale Aussage hat nicht immer einen trivialen Beweis.

4. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie für alle $x \in R$:

- (a) $x + (-0) = x$
- (b) $-0 = 0$
- (c) $0 \cdot x = 0$

5. Zeigen Sie: In jedem Vektorraum V über K gilt für alle $x \in V$: $(-1) \cdot x = -x$.

6. Zeigen Sie:

- (a) In jedem Körper gilt: $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$.
- (b) Das multiplikative inverse Element in einem Körper ist eindeutig.

7. (a) Sei M eine nichtleere Menge. Sei $V = (P(M), \Delta, -, \{\}, *)$ und $K = \mathbb{Z}_2$, wobei $-A = A$ und “*” definiert sei durch $1 * A = A$ und $0 * A = \{\}$ für $A \subseteq M$ und $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$.
Ist V ein Vektorraum über K ? Falls nein, geben Sie an, welche der Eigenschaften (1)-(8) aus Def. 8.5 erfüllt sind.

- (b) Wie (a) für $V = (\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, +, -, 0, \cdot)$ mit den gewöhnlichen Rechenoperationen über $K = \mathbb{R}$.

8. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis des Nullraums von A sowie des Zeilenraums von A , jeweils über \mathbb{Z}_2 .