Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

11. Übungsblatt für den 24. Jänner 2005

1. Sei $B = ((1, 2, 0), (3, 4, -1), (0, -2, 3))$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.
 - (a) Es seien $u_B = (1, 2, 3), v_B = (2, -1, 2)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von u, v bezüglich der kanonische Basis E .
 - (b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $a = (0, -2, 3), b = (2, -2, -1)$ und $c = (1, 0, 0)$ bezüglich B .
2. Seien $b_1, b_2, b_3, f \in P_2(\mathbb{R})$ definiert durch $b_1(x) := 1, b_2(x) := 1 + x, b_3(x) := 1 + x + x^2$ und $f(x) := x + 2x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von f bezüglich (b_1, b_2, b_3) .
3. Seien $V = \mathbb{R}^4, U = \{(w, x, y, z) \in V \mid w + 2y + 3z = 0, -w + x + 2y - z = 0\}$ und $W = \{(w, x, y, z) \in V \mid 3w - x + y + 2z = 0, x + 3y + 2z = 0\}$.
 - (a) Geben Sie eine Basis für $U + W$ an. Ist die Summe direkt?
 - (b) Geben Sie die Dimensionen folgender Vektorräume über $\mathbb{R}$ an: $U, W, U + W, U \cap W$ (Vergleichen Sie mit Satz 21.9).
4. Seien U, V wie in Aufgabe 3.
 - (a) Bestimmen Sie einen Komplementärraum von U in V .
 - (b) Geben Sie ein Repräsentantensystem für den Faktorraum V/U an.
 - (c) Was ist die Dimension von V/U über $\mathbb{R}$?
5. Gelten folgende Aussagen für alle Matrizen A, B über beliebigen Körpern?
 - (a) $A^2 = E$ (Einheitsmatrix) $\Rightarrow A$ ist Diagonalmatrix;
 - (b) $A^2 = \mathbf{0} \Rightarrow A = \mathbf{0}$ (Nullmatrix);
 - (c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
 - (d) $((A^{-1})^t)^{-1} = A^t$.
6. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\{C \in K_n^n \mid \forall A \in K_n^n : AC = CA\}$.