Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

10. Übungsblatt für den 17.1.2005

1. Sei $M := \{(1,0,2),(2,1,1),(5,2,0),(2,0,4)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.
   Bestimmen Sie alle linear unabhängigen Teilmengen von *M*. „Nebenrechnungen“ dürfen Sie mit MATHEMATICA durchführen.

2. (a) Sei $V := \mathbb{R}^{3}$. Ist $M = ((1,2,1),(3,1,5),(3,-4,7))$ linear unabhängig?
   (b) Sei $V := \mathbb{Z}_3{}^{3}$. Ist $M = ((1,2,1),(1,1,0),(1,1,2))$ linear unabhängig?

3. Zeigen oder widerlegen Sie:
   Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ linear unabhängig in $(\mathbb{R},+)$ über $\mathbb{Q}$, so auch in $(\mathbb{R},+)$ über $\mathbb{R}$.

4.. Sei $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^{i-1}e^x$ und sei $V = L((f_1, f_2, f_3))$

   Zeigen oder widerlegen Sie: $B = (f_1, f_2, f_3)$ ist eine Basis von V

5. Gegeben sei der Vektorraum $V = (P(\mathbb{N}),\Delta)$ über $\mathbb{Z}_2$ mit $1 \cdot M := M$ und $0 \cdot M := \{\ \}$
   (a) Finden Sie drei linear unabhängige Elemente in *V*
   (b) Finden Sie drei linear abhängige Elemente in *V*
   (c) Finden Sie eine Basis von *V*
   (d) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\{1,3\}$ bzgl. dieser Basis

6. Sei $V :=_{\mathbb{R}} P_2(\mathbb{R})$ über und sei $U \le V$ mit $U = \left\{ p \mid \int_0^1 p(x)dx = 0 \right\}$
   Bestimmen Sie eine Basis von *U* sowie die Dimension von *U*

7. (a) Bestimmen Sie Dimension und eine Basis von $L((1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1 1)) \subseteq \mathbb{R}^{4}$.
   (b) Gilt $L((1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1 1)) = L((1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,1,0))$?

8. Seien $U_1 := \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$, $U_2 := \{(x,y,z) \mid x-y+z=0\}$ und
   $U_3 := \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$ Unterräume von $\mathbb{R}^{3}$.
   (a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U_1, $U_4 := U_1 \cap U_2$ und $U_5 := U_1 \cap U_2 \cap U_3$
   (b) Bestimmen Sie die Dimensionen dieser Unterräume.