Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
9. Übungsblatt, für den 10. Jänner 2005

1. Zeigen Sie: $|\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich}\}| = |\mathbb{N}|$.

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Schröder-Bernstein, dass für beliebige Mengen A, B, C gilt:
$$(|A| = |C| \wedge A \subseteq B \subseteq C) \Rightarrow |A| = |B|.$$

3. Sei $(\mathbb{Z}_7)_2^2$ die Menge aller 2×2 Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deren Elemente aus $\mathbb{Z}_7$ sind. Auf dieser Menge sind die Operationen
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \oplus s & b \oplus t \\ c \oplus u & d \oplus v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \odot a & \lambda \odot b \\ \lambda \odot c & \lambda \odot d \end{pmatrix}$$
definiert, wobei $\lambda \in \mathbb{Z}_7$. Zeigen Sie, dass $((\mathbb{Z}_7)_2^2, +)$ ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \odot)$ ist.

4. Ist $\{a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$? Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

5. Sei V ein Vektorraum über K. Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) $\forall v \in V, \forall \lambda \in K : \lambda v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \vee v = \mathbf{0})$,
   (b) $\forall \lambda, \mu \in K : \forall v \in V : (\lambda v = \mu v \Rightarrow \lambda = \mu)$,
   (c) $\forall \lambda \in K : \forall v, w \in V : (\lambda v = \lambda w \Rightarrow v = w$.

6. Sei $M(\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Summe zweier Funktionen $f, g \in M(\mathbb{R})$ sei definiert als
$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x),$$
   (a) Zeigen Sie, dass $(M(\mathbb{R}), +)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, wobei $(\lambda, f) \mapsto (\lambda \cdot f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M(\mathbb{R})$ definiert ist durch
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$. Sie heißt ungerade, wenn $-f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Weisen Sie nach, dass die Menge der geraden bzw. ungeraden Funktionen einen Unterraum von $M(\mathbb{R})$ bildet.

7. Sei K der Körper $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$, $V = K^3$, $U_1 = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ und $U_2 = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 2z = 0\}$.

   (a) Bestimmen Sie $U_1 \cap U_2$.

   (b) Wieviele Elemente haben die Vektorräume V, U_1, U_2 und V/U_1 über K?

   (c) Geben Sie die Elemente von V/U_1 explizit an.

8. Gegeben seien $C[0,1]$ und der Unterraum

$$U := \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}.$$

   Bestimmen Sie den Faktorraum $C[0,1]/_U$ und ein entsprechendes Repräsentantensystem.