Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
8. Übungsblatt für den 13. Dezember 2004

1. Es sei die Menge A_1 mit $\preceq_1$ und A_1 mit $\preceq_2$ geordnet. Zeigen Sie, die Transitivität der lexikographischen Ordnung auf $A_1 \times A_2$.

2. Zeigen Sie, dass der Gruppenkern eines Monoids eine Gruppe bildet (siehe 13.9 b) im Skriptum).

3. Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass die Menge aller Relationen $P(A^2)$ bezüglich des Relationenprodukts $\diamond$ ein Monoid bildet. Bestimmen Sie neutrales Element und Gruppenkern von $(P(A^2), \diamond)$.

4. Bildet $(\mathbb{Z}, +')$ mit $x +' y := x + y - 3$ für $x, y \in \mathbb{Z}$ eine Gruppe?

5. Für $x, y \in \mathbb{R}$, definieren wir $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Ist die Relation $\sim$ mit den Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$ verträglich? Wenn ja, dann bilden Sie die Faktorstrukturen.

6. Sei $M(\mathbb{Z})$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$. Für zwei Funktionen $f, g \in M(\mathbb{Z})$ definieren wir die Summe als
$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto f(x) + g(x),$$
und das Produkt als
$$f \cdot g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$
   (a) Zeigen Sie: $(M(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ ist ein Ring.
   (b) Ist $(M(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, ein Ring mit Einselement, ein Körper? Geben Sie - falls existent - den Gruppenkern von $(M(\mathbb{Z}), \cdot)$ an.
   (c) Sei $P(\mathbb{Z})$ die Menge aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{Z}$. Ist $P(\mathbb{Z})$ ein Unterring von $(M(\mathbb{Z}), +, \cdot)$?

7. (a) Geben Sie drei Unterringe von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ an.
   (b) Geben Sie drei Unterkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ an.
   *(c) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der nicht kommutativ ist.

8. Überprüfen Sie, ob folgende Mengen A und B gleichmächtig sind. Geben Sie gegebenenfalls eine bijektive Abbildung an.
   (a) $A = \mathbb{N}$ und $B = 7\mathbb{N} := \{7n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
   (b) $A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N} \setminus 7\mathbb{N}$;
   (c) $A = \mathbb{N} \times [0, 1[$ und $B = \mathbb{R}$;
   (d) $A = [0, 1]$ und $B = [0, 1] \times [0, 1]$.