Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

7. Übungsblatt für den 6.12.2004

1. Zeigen <u>oder</u> widerlegen Sie folgende Behauptung:
   Sei R eine reflexive, symmetrische Relation auf A. Sei weiters :
   $S = \{(a,c) \in A \times A \mid \exists b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R)\}$
   Dann ist $R \cup S$ eine Äquivalenzrelation.

2. Sei M die Menge aller Städte auf der Erde und sei ~ eine Relation, wobei zwei Städte genau dann zueinander in Relation stehen, wenn sie sich im selben Land befinden.

   (a) Zeigen Sie **auf zwei Arten** (direkt und durch Anwenden eines Satzes aus der Vorlesung) ~ ist eine Äquivalenzrelation (ÄR)
   (b) Bestimmen Sie die Faktormenge $M/\sim$. Wie viele Elemente hat $M/\sim$?
   (c) Finden Sie ein Repräsentantensystem von $M/\sim$

3. Sei $M = \mathbb{R}^3$ und sei $(a,b,c) \sim (d,e,f) \;\Leftrightarrow\; (b=e) \wedge (c=f)$
   (a) Wie muss *f* in Satz 11.5 gewählt werden, um zu zeigen, dass ~ eine ÄR ist.
   (b) Bestimmen Sie die Faktormenge $M/\sim$ in der Form $\{\{...\}...\}$
   (c) Interpretieren Sie die Faktormenge geometrisch
   (d) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von (-1,3,4)
   (e) Finden Sie ein Repräsentantensystem von $M/\sim$

4. Sei $M = \mathbb{Z}$ und $a \sim b :\Leftrightarrow a \equiv_3 b$
   (a) Bestimmen Sie die Faktormenge $M/\sim$ in der Form $\{\{...\}...\}$
   (b) Bestimmen Sie K_9
   (c) Finden Sie ein Repräsentantensystem von $M/\sim$

5. (a) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die geordnete Menge $M = (\{3,4,5,10,12,15,60\},|)$
   (b) Bestimmen Sie von M und der Teilmenge $B = \{3,12,15\}$ alle minimalen und maximalen Elemente, sowie – falls existent – kleinste und größte Elemente.
   (c) Bestimmen Sie – falls existent – alle unteren und oberen Schranken sowie Infimum und Supremum von B in M.

6. (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $(G,\circ)$ eine Gruppe, $(H,\circ)$ eine Halbgruppe mit $H \subseteq G$, so ist H ein Monoid.
   (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $(H,\circ)$ ein Monoid, $(H',\circ)$ ein Monoid mit $H' \subseteq H$, so haben beide dasselbe neutrale Element.
   (c) Zu jedem $n \in IN$ gibt es eine idempotente Halbgruppe H mit n Elementen.
   (d) Jedes unendliche Monoid hat genau ein idempotentes Element.
   (e) Jedes kommutative Monoid mit unendlich vielen invertierbaren Elementen ist eine Gruppe.

7. (a) Finden Sie eine Gruppe $(G,\circ)$ und Elemente $x, y \in G$ mit $(x \circ y)^{-1} \neq x^{-1} \circ y^{-1}$
(b) Zeigen Sie: Der Durchschnitt von Untergruppen einer Gruppe ist wieder eine Gruppe
(c) Ist auch die Vereinigung von Untergruppen einer Gruppe wieder eine Gruppe? Eine Halbgruppe? Ein Verknüpfungsgebilde?

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender (in Kurzschreibweise gegebener) Gleichungssysteme in drei Variablen über $\mathbb{Z}_5$ und bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen Überprüfen Sie Ihre Lösungen mit MATHEMATICA!

(a) $\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}$

(c) $\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{array}$ (d) $\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$