

# Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

## 6. Übungsblatt, für den 29. November 2004

1. Sei  $\approx$  eine reflexive Relation auf einer Menge  $A$ . Zeigen Sie, dass  $\approx$  genau dann symmetrisch und transitiv ist, wenn aus  $a \approx b$  und  $a \approx c$  stets  $b \approx c$  für beliebige  $a, b, c$  aus  $A$  folgt.
2. Seien  $R, S$  Relationen auf einer Menge  $A$ . Zeigen oder widerlegen Sie:
  - (a) Ist  $R$  symmetrisch, so ist auch  $R^{-1}$  symmetrisch.
  - (b) Ist  $R$  transitiv, so ist auch  $R^{-1}$  transitiv.
  - (c) Sind  $R$  und  $S$  symmetrisch, so ist auch  $R \circ S$  symmetrisch.
  - (d) Sind  $R$  und  $S$  transitiv, so ist auch  $R \circ S$  transitiv.

Hinweis:  $R \circ S$  bezeichnet die Hintereinanderausführung der Relationen  $R, S$ . Sie ist ebenfalls eine Relation auf der Menge  $A$  und folgendermaßen definiert

$$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z \in A : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}.$$

3. Zeigen Sie für eine Funktion  $f : A \rightarrow B$ :
  - (a)  $S \subseteq T \subseteq A \Rightarrow f(S) \subseteq f(T)$
  - (b)  $S, T \subseteq A \Rightarrow f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
  - (c)  $S, T \subseteq A \Rightarrow f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$
4. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind. Im Falle von Bijektivität geben Sie die inverse Funktion an.
  - (a)  $f : M \rightarrow P(M), A \mapsto C_M(A)$  für eine Menge  $M$
  - (b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - 1)(x - 3)(x + 3)$
  - (c)  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto (-1)^x$
  - (d)  $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, x \mapsto [x]_n$  (siehe auch Skriptum S.69)
  - (e)  $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
5. Gesucht sind Funktionen  $f : A \rightarrow A$ , für die gilt  $f \circ f = \text{id}_A$  und  $f \neq \text{id}_A$ , wobei  $A = [0, 1]$ ,  $A = \mathbb{Z}$  bzw.  $A = \mathbb{Z}_4$  zu untersuchen sind. Geben Sie jeweils mindestens zwei Beispiele an. Wie lauten die entsprechenden inversen Funktionen  $f^{-1}$ ?
6. Zeigen Sie Satz 10.10 b) aus dem Skriptum.