

Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

5. Übungsblatt für den 22. November 2004

1. Überprüfen Sie folgende Induktionsbeweise auf ihre Korrektheit:

(a) Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Wir zeigen: Für jede Menge mit n Pferden gilt: alle n Pferde haben dieselbe Farbe.

Bew. Induktionsanfang: Aussage gilt für $n = 1$.

Induktionsschluss von n auf $n + 1$: Wir nummerieren die Pferde mit den Zahlen $1, \dots, n + 1$. Nach Induktionsannahme haben die n Pferde $1, \dots, n$ alle dieselbe Farbe; ebenso haben die n Pferde $2, \dots, n + 1$ alle dieselbe Farbe. Somit haben alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe, nämlich die der Pferde $2, \dots, n$.

(b) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n+1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bew. Induktionsschluss von n auf $n + 1$: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n^2+n+1}{2} + (n + 1) = \frac{n^2+3n+3}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2}$, was zu zeigen war.

2. Zeigen Sie mit Induktion:

(a) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $(1+a)^n \geq 1+na$ für alle $a \in \mathbb{R}, a > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ (Bernoulli'sche Ungleichung).

3. Zeigen Sie mit Induktion, dass jede natürliche Zahl eine Binärdarstellung hat, d.h.:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists k \in \mathbb{N}_0 \exists a_0, \dots, a_k \in \{0, 1\} : n = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$$

4. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$, und sei $A = \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie mit Induktion, dass A genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit genau k Elementen hat.

$$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ und } n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \right]$$

5. Verwenden Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus um jeweils den größten gemeinsamen Teiler folgender Zahlen zu bestimmen; geben Sie auch das kgV an:

(a) 105, 378

(b) 34, 55

- (c) 105, 175, 378
6. Finden Sie jeweils 3 Paare ganzer Zahlen (x, y) so, dass folgende Gleichungen gelten:
- (a) $36x + 96y = 24$;
 - (b) $36x + 96y = -18$;
 - (c) $34x - 55y = 4$.
7. Überprüfen Sie, ob folgende Relationen R von A nach B funktional, reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv sind. Geben Sie die inversen Relationen an:
- (a) $A = \mathbb{N}, B = P(\mathbb{N}), aRb :\Leftrightarrow a \in b$;
 - (b) $A = B = [0, 1], aRb :\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$;
 - (c) $A = B = \mathbb{Z}, aRb :\Leftrightarrow 2|a + b$;
 - (d) $A = B = \mathbb{N} \setminus 1, aRb :\Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) > 1$.
8. Zeigen oder widerlegen Sie:
- (a) Jede transitive und symmetrische Relation auf einer Menge A ist reflexiv.
 - (b) Wenn eine Relation R auf einer Menge A sowohl Äquivalenz- als auch Ordnungsrelation ist, dann gilt $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$.