

# Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

## 2. Übungsblatt für den 25. Oktober 2004

1. Geben Sie eine charakterisierende Eigenschaft für die Elemente folgender Mengen an:

$$A = \{-3, 0, 3, 6, 9\} \quad B = \{0, -2, -6, -12, -20\} \quad C = [3, 4[\times] - 1, 0[ \\ D = P(M) \text{ für eine Menge } M \quad E = \emptyset.$$

2. Sei  $A = \{1, 2, 3\}$ . Welche der folgende Aussagen sind wahr?

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} 1 \subseteq A & \text{(b)} A \in \{A\} & \text{(c)} A \subseteq P(A) \\ \text{(d)} A \in A & \text{(e)} \mathbb{N} \subseteq \{\mathbb{Z}\} & \text{(f)} \{\emptyset\} \cap \{\{\emptyset\}\} = \emptyset \end{array}$$

3. Seien  $A, B, C, U$  Mengen mit  $A \subseteq U, B \subseteq U$ . Zeigen Sie folgende Gleichungen mit Euler-Venn Diagrammen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} A \cup (B \cap A) = A & \text{(b)} C_U(A \cup B) = C_U(A) \cap C_U(B) \\ \text{(c)} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & \end{array}$$

4. Bestimmen Sie folgende Mengen:

$$A = C_{\mathbb{Z}}(\{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ teilt } x\}) \quad B = \bigcup_{i=1}^5 [-i^2, -i[ \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

5. Wieviele Elemente haben die folgenden Mengen?

$$\begin{array}{lll} A = [0, 1] \Delta ]0, 1[ & B = \{0, 1, 2\} \times \{3, 4, 5, \dots, 12\} \times \{-3, -2, -1, 0, 1\} \\ C = \emptyset & D = \{\{\}\} & E = \{\{\}, 1, \{1\}\} \end{array}$$

6. Zeigen Sie:

$$\text{(a)} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \frac{1}{n}, n[ = ]0, \infty[ \quad \text{(b)} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]0, \frac{1}{n}[ = \emptyset.$$

7. Gilt für alle Mengen  $A, B, C$ , dass

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Hinweis: Beweisen Sie die Gleichheit für alle Mengen oder widerlegen Sie sie an Hand eines Gegenbeispiels.

8. Seien  $a, x$  Elemente einer Menge  $A$ ; seien  $b, y$  Elemente einer Menge  $B$ . Zeigen Sie mit Definition 3.12 aus dem Skriptum:

- (a)  $(a, a) = \{\{a\}\}$ ;
- (b) Wenn  $(x, y) = \{\{a\}\}$ , dann gilt  $x = y = a$ ;
- (c) Wenn  $(a, b) = (x, y)$ , dann gilt  $a = x, b = y$ .

Hinweis zu (c): Verwenden Sie (a) und (b).