Kommutative Algebra
9. Übungsblatt für den 19. Mai 2009

Wir besprechen am 19. Mai auch die Beispiele 4 und 6 vom 8. Übungsblatt.

(1) (Beweisen geometrischer Sätze) Wir betrachten den Satz von Desargues.

Seien $S, A, B, C, D, E, F, H, I, J$ Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) S, A, D liegen auf einer Geraden.
(b) S, B, E liegen auf einer Geraden.
(c) S, C, F liegen auf einer Geraden.
(d) A, B, H liegen auf einer Geraden.
(e) D, E, H liegen auf einer Geraden.
(f) A, C, J liegen auf einer Geraden.
(g) D, F, J liegen auf einer Geraden.
(h) B, C, I liegen auf einer Geraden.
(i) E, F, I liegen auf einer Geraden.
(j) E, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
(k) F, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
(l) F, B, E liegen nicht auf einer Geraden.
(m) C, A, D liegen nicht auf einer Geraden.

Dann liegen H, I, J auf einer Geraden.

(a) Machen Sie eine Skizze für diesen Satz. (Die Skizze wird schön, wenn Sie S als Ausgangspunkt dreier Strahlen zeichnen, A näher bei S liegt als D, E näher bei S liegt als B, und C näher bei S liegt als F.)
(b) Finden Sie ein polynomiales Gleichungssystem, dessen Unlösbarkeit diesen Satz impliziert.
(c) Zeigen Sie dadurch, dass eine Gröbnerbasis des Systems ein konstantes Polynom enthält, dass das System tatsächlich unlösbar ist.

Hinweis: Auf
`http://verdi.algebra.uni-linz.ac.at/Students/`
`s09/KommutativeAlgebra/pappus-beweis-5.m`
und im Anhang finden Sie den Beweis des Satzes von Pappus.

(2) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= x^3y^3 + 1 \\ p &= 1 + 3x + 2x^2 + x^2y + x^3y \\ q &= xy^2 + x^2y^2 \end{aligned}$$

Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass $f = a_1\, p + a_2\, q + r$, $\operatorname{multideg}(a_1\, p) \leq \operatorname{multideg}(f)$, $\operatorname{multideg}(a_2\, q) \leq \operatorname{multideg}(f)$, und kein Term in r ein Vielfaches von $\operatorname{LT}(p)$ oder $\operatorname{LT}(q)$ ist.

(3) Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass der Rest der Division von f durch ein Hauptideal $\langle f_1 \rangle$ eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie also: Sei $\leq$ eine zulässige Ordnung, sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $f, f_1 \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f_1 \neq 0$. Seien $a, b, r, s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $f = a\, f_1 + r = b\, f_1 + s$. Wir nehmen an, dass kein Term von r und kein Term von s durch $\operatorname{LT}(f_1)$ teilbar ist. Zeigen Sie $r = s$!

```
Collinear [P1_, P2_, P3_] :=
   Det [{P1, P2, P3}]


AA= {a1, a2, 1};
BB= {b1, b2, 1};
CC= {c1, c2, 1};
DD= {d1, d2, 1};
EE= {e1, e2, 1};
FF= {f1, f2, 1};
GG= {g1, g2, 1};
HH= {h1, h2, 1};
II= {i1, i2, 1};
JJ= {j1, j2, 1};


TheSystem =
   {Collinear [AA,BB,CC],
    Collinear [DD,EE,FF],
    Collinear [AA,HH,EE],
    Collinear [DD,HH,BB],
    Collinear [DD,II,CC],
    Collinear [AA,II,FF],
    Collinear [EE,JJ,CC],
    Collinear [BB,JJ,FF],
    (* Non degenerate *)
    Collinear [AA,BB,DD] * z2 - 1,
    Collinear [AA,BB,EE] * z3 - 1,
    (* Conclusion *)
    Collinear [HH,II,JJ] * z1 - 1}

TheSystemGB = GroebnerBasis [TheSystem,
                             MonomialOrder -> DegreeReverseLexicographic]
```