Kommutative Algebra

8. Übungsblatt für den 12. Mai 2009

Wir besprechen am 12. Mai auch das Beispiel 5 vom 7. Übungsblatt.

(1) (Algebraische Abhängigkeit) Sei k ein Körper, und sei I ein Ideal von $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $1 \notin I$. Seien $y_1, \ldots, y_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Bedingungen äquivalent sind.

(a) $(y_1 + I, \ldots, y_m + I)$ ist algebraisch unabhängig über k in R/I.

(b) $(y_1 + \sqrt{I}, \ldots, y_m + \sqrt{I})$ ist algebraisch unabhängig über k in $R/\sqrt{I}$.

(2) (Ganze Erweiterungen) Seien A, B Integritätsbereiche mit $A \leq B$, und seien $b_1, \ldots, b_n \in B$. Wir nehmen an, dass jedes b_i ganz über A ist. Zeigen Sie, dass $A[\![b_1, \ldots, b_n]\!]$ ganz über A ist.

(3) Finden Sie eine Noethersche Normalisierung von $R = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ über $\mathbb{Q}$, wobei $I = \langle x^5+xyz+1 \rangle$. Finden Sie also $r \in \mathbb{N}_0$ und $y_1, \ldots, y_r \in R$, sodass $(y_1, \ldots, y_r)$ algebraisch unabhängig ist, und R ganz über $\mathbb{Q}[\![y_1, \ldots, y_r]\!]$ ist.

(4) Finden Sie eine Noethersche Normalisierung von $R = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ über $\mathbb{Q}$, wobei $I = \langle xyz + 1 \rangle$. *Hinweis:* Zeigen Sie etwa, dass R ganz über $\mathbb{Q}[\![(y - x) + I, (z - x) + I]\!]$ ist.

(5) Zeigen Sie, dass der Quotientenkörper $\mathbb{C}(x)$ von $\mathbb{C}[x]$ algebraisch über $\mathbb{C}[x]$ ist.

(6) * (Bonusbeispiel) Sei R ein Ring, der $\mathbb{C}[x]$ als Unterring (mit demselben Einselement) enthält. Wir nehmen an, dass R ganz über $\mathbb{C}[x]$ ist. Zeigen Sie, dass R kein Körper ist.