Kommutative Algebra

7. Übungsblatt für den 5. Mai 2009

Wir besprechen am 5. Mai auch das Beispiel 5 vom 6. Übungsblatt.

(1) Sei $R := \mathbb{Z}[\![\sqrt[3]{2}]\!]$, und sei $x := 5 + \sqrt[3]{2}$. Da $x \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$, und da $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, ist auch x ganz über $\mathbb{Z}$. Im folgenden Beispiel konstruieren wir ein Polynom in $\mathbb{Z}[t]$ mit führendem Koeffizienten 1, das x als Nullstelle hat.

(a) Sei $b_0 := 1$, $b_1 := \sqrt[3]{2}$, $b_2 := (\sqrt[3]{2})^2$. Finden Sie eine 3×3-Matrix A, sodass

$$\begin{pmatrix} b_0 x \\ b_1 x \\ b_2 x \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(2) Seien $x := \sqrt{2}$ und $y := \sqrt{\sqrt{2} + 1}$.

(a) Zeigen Sie, dass x ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass y ganz über $\mathbb{Z}[\![x]\!]$ ist.

(c) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das y als Nullstelle hat.

Hinweis: y liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot x + \mathbb{Z} \cdot y + \mathbb{Z} \cdot xy$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.

(3) Sei $R := \mathbb{Z}[t_1, t_2]/I$, wobei $I := \langle {t_1}^2 - 2,\ {t_2}^2 - t_1 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}[t_1,t_2]}$.

(a) Zeigen Sie, dass $t_1 + I$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $t_2 + I$ ganz über $\mathbb{Z}[\![t_1 + I]\!]$ ist.

(c) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das $t_2 + I$ als Nullstelle hat.

Hinweis: $t_2 + I$ liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_2 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I)(t_2 + I)$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.

(4) (Idealprodukt) Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, sei $m \in R \setminus \{0\}$, und sei I ein Ideal von R. Sei M das von m erzeugte Hauptideal. Wir nehmen an, dass $I \cdot M = M$ gilt. Zeigen Sie $1 \in I$. *Bemerkung und (schwieriges) Bonusbeispiel:* Die Behauptung gilt auch, wenn M kein Hauptideal ist.

(5) (Ideale und direkte Produkte) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Seien I, J Ideale von R mit $I + J = R$ und $I \cap J = \{0\}$. Zeigen Sie, dass R isomorph zu $R/I \times R/J$ ist.