Kommutative Algebra
5. Übungsblatt für den 21. April 2009

Wir besprechen am 21. April auch die Beispiele 4 und 5 vom 4. Übungsblatt.

(1) (Quotienten von Idealen) Seien A, B Ideale von $\mathbb{Z}$. Mit $(A : B)$ kürzen wir $\{c \in \mathbb{Z} \mid \text{für alle } b \in B : c\, b \in A\}$ ab. Berechnen Sie:
  (a) $((12) : (4))$.
  (b) $((4) : (12))$.
  (c) $((12) : (30))$.
  (d) Berechnen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $((a) : (b))$.

(2) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, seien A, B Ideale von R, und sei P ein Primideal von R. Mit $\sqrt{A}$ bezeichnen wir das Radikal von A. Zeigen Sie:
  (a) Wenn $A \cap B \subseteq P$, so gilt $A \subseteq P$ oder $B \subseteq P$.
  (b) $\sqrt{P} = P$.
  (c) $\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$.

(3) (Berechnen des Schnitts zweier Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und seien I und J Ideale von R. Seien $\hat{I}$ und $\hat{J}$ die Ideale von $R[x]$, die durch

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \{\textstyle\sum_{k=0}^{n} i_k x^k \mid n \in \mathbb{N}_0, i_0, \ldots, i_n \in I\}, \\ \hat{J} &= \{\textstyle\sum_{k=0}^{n} j_k x^k \mid n \in \mathbb{N}_0, j_0, \ldots, j_n \in J\} \end{aligned}$$

gegeben sind.
  (a) Zeigen Sie, dass $\hat{I}$ ein Ideal von $R[x]$ ist.
  (b) Nehmen Sie an, dass $\{a_1, \ldots, a_m\}$ das Ideal I erzeugt. Geben Sie eine endliche Erzeugermenge von $\hat{I}$ an!
  (c) Nehmen Sie an, dass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ das Ideal J erzeugt. Geben Sie eine endliche Erzeugermenge von $\hat{J} \cdot (x - 1)$ an!
  (d) Zeigen Sie

$$\{r \in R \mid r\, x^0 \in \hat{I} \cdot (x) + \hat{J} \cdot (x - 1)\} = I \cap J.$$