Kommutative Algebra
4. Übungsblatt für den 31. März 2009

Wir besprechen am 31. März auch die Beispiele 4 und 5 vom 3. Übungsblatt.

(1) (Teilbarkeit) Seien $f, g \in \mathbb{Z}[x]$. Wir nehmen an, dass f primitiv ist, und dass f in $\mathbb{Q}[x]$ das Polynom g teilt. Zeigen Sie, dass $f|g$ auch in $\mathbb{Z}[x]$ gilt.

(2) Die Polynome x und y in $\mathbb{Q}[x, y]$ haben nur konstante gemeinsame Teiler. Trotzdem lässt sich 1 nicht als $ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ schreiben. Zeigen Sie, dass aber folgende Aussage gilt:

> Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ so, dass f und g keinen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Q}[x, y]$ haben. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass
> $$af + bg \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$$

Hinweis: Wie kann ein gemeinsamer Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$ aussehen?

(3) (Größter gemeinsamer Teiler) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= x^4y^2 + x^4y + x^3y + x^3 \\ g &= x^2y^4 + x^2y^3 + xy^3 + xy^2 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$ mit führendem Koeffizienten 1.
(b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(y)[x]$ mit führendem Koeffizienten 1.
(c) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[x, y]$.
(d) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x, y)$.

Dabei ist $\mathbb{Q}(x)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Q}[x]$. *Hinweis:* Sie können die Funktion `PoliesExtendedGCD` aus der Datei `poliesGCD.m` verwenden, die den g.g.T. in $K[x]$ (K Körper) berechnet.

(4) (Bonusbeispiel) Zeigen Sie, dass in einem faktoriellen Integritätsbereich der Durchschnitt zweier Hauptideale wieder ein Hauptideal ist.

(5) (Bonusbeispiel, Eisenstein-Kriterium)
(a) Sei R ein Integritätsbereich, sei $m \in \mathbb{N}$, und sei $a \in R$. Seien $f, g \in R[x]$ so, dass $f \cdot g = ax^m$. Zeigen Sie, dass f und g Monome, das heißt, von der Form bx^l sind.
(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei F ein faktorieller Integritätsbereich, sei p ein primes Element von F, und sei $a = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in F[t]$ so, dass
   (i) $p|a_0, \ldots, p|a_{n-1}$,
   (ii) $p \not| a_n$,
   (iii) $p^2 \not| a_0$.

   Zeigen Sie, dass a dann in $Q(F)[t]$ irreduzibel ist.

Hinweis: Konstruieren Sie mit dem Gaußschen Lemma aus einer Zerlegung in $Q(F)[t]$ eine Zerlegung in $F[t]$, und betrachten Sie diese Zerlegung in $F/(p)[t]$.