Kommutative Algebra
2. Übungsblatt für den 17. März 2009

Wir besprechen am 17. März auch die Beispiele 4 und 7 vom 1. Übungsblatt.

(1) (Invertierbare Elemente) Bestimmen Sie für den Ring R und das Element $x \in R$ jeweils, ob x invertierbar, prim, oder irreduzibel ist.
   (a) $R = \mathbb{Z}$, $x = -1$.
   (b) $R = \mathbb{Z}$, $x = -19$.
   (c) $R = \mathbb{Z}$, $x = -6$.
   (d) $R = \mathbb{R}[t]$, $x = t^4 + 2t^2 + 1$.
   (e) $R = \mathbb{Z}[t]$, $x = 5t + 10$.
   (f) $R = \mathbb{Q}[t]$, $x = 5t + 10$.

(2) (Zornsches Lemma) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Ideal von R ist *maximal*, wenn es ein maximales Element in

$$\{I \mid I \text{ ist Ideal von } R \text{ und } I \neq R\}$$

ist. Zeigen Sie, dass jedes von R verschiedene Ideal in einem maximalen Ideal von R enthalten ist! Wo verwenden Sie, dass R ein Einselement hat?

(3) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
   (b) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.

(4) (Einfache Ringe) Ein Ring R ist *einfach*, wenn er keine Ideale außer $\{0\}$ und R hat. Zeigen Sie, dass folgende beiden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) R ist ein einfacher kommutativer Ring mit Eins, und $|R| \geq 2$.
   (b) R ist ein Körper.

(5) (Einfache Ringe) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei M ein maximales Ideal von R. Zeigen Sie, dass R/M ein Körper ist.