Kommutative Algebra
14. Übungsblatt für den 30. Juni 2009

Wir besprechen am 30.6. auch das 6. Beispiel vom 13. Übungsblatt.

(1) Finden Sie die implizite Darstellung folgender Kurven im $\mathbb{R}^2$, und skizzieren Sie die Kurven.
   (a) $x = \frac{1-t^2}{1+t+t^2}$, $y = \frac{t(t+2)}{1+t+t^2}$.
   (b) $x = t^2 - 1$, $y = t\,(t^2 - 1)$.
   (c) $x = -2 + 5\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = 3 + 5\frac{2t}{1+t^2}$.

(2) Sei k ein Körper, und seien $f, g \in k[x,y]$ mit $\mathrm{ggT}_{k[x,y]}(f,g) = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathsf{V}(f) \cap \mathsf{V}(g)$ endlich ist. *Hinweis:* Beispiel 4/2.

(3) Sei f ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{C}[x,y]$. Zeigen Sie, dass $\mathsf{V}(f)$ eine irreduzible Varietät in $\mathbb{C}^2$ mit Dimension 1 ist.

(4) Wir betrachten die Varietäten $V := \mathbb{C}^2$ und $W := \mathsf{V}(x\,y - z^2)$ und die Abbildung $G : V \to W$, $(t_1, t_2) \mapsto (t_1^2, t_2^2, t_1\,t_2)$. Wir bilden die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}[W] \to \mathbb{C}[V]$, die durch

$$\varphi(h)(v) = h(G(v))$$

für $h \in \mathbb{C}[W]$, $v \in V$ definiert ist.
   (a) Ist φ ein Ringhomomorphismus?
   (b) Ist φ injektiv?

(5) Wir betrachten den Isomorphismus F der Varietät $V := \mathbb{C}^2$ auf die Varietät $W := \mathsf{V}(x_3 - x_1^2\,x_2)$, der durch $F(t_1, t_2) := (t_1, t_2, t_1^2\,t_2)$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ gegeben ist.
   (a) Finden Sie einen Isomorphismus φ von $\mathbb{C}[W]$ nach $\mathbb{C}[V]$.
   (b) Berechnen Sie $\varphi(\pi_3)(t_1, t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$.