Kommutative Algebra
13. Übungsblatt für den 23. Juni 2009

Wir besprechen am 23.6. auch das 5. Beispiel vom 12. Übungsblatt.

(1) Sei k ein Körper, seien I, J Ideale von $k[x_1, \ldots, x_n]$, und seien V, W Varietäten in k^n.
  (a) Zeigen Sie $\mathsf{V}(I + J) = \mathsf{V}(I) \cap \mathsf{V}(J)$ und $\mathsf{I}(V) + \mathsf{I}(W) \subseteq \mathsf{I}(V \cap W)$.
  (b) Zeigen Sie, dass $\mathsf{I}(V \cap W) = \sqrt{\mathsf{I}(V) + \mathsf{I}(W)}$, wenn k algebraisch abgeschlossen ist.

(2) Skizzieren Sie die Varietät $\mathsf{V}(xz, yz) \subseteq \mathbb{Q}^3$ und berechnen Sie ihre Dimension.

(3) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle xz, yz\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass $(x + I, y + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (b) Finden Sie $f \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ mit $f \neq 0$ und $f(x, y, z^3+x+1) \in \langle x, y\rangle$.
  (c) Finden Sie $g \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ mit $g \neq 0$ und $g(x, y, z^3 + x + 1) \in \langle z\rangle$.
  (d) Finden Sie $h \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ mit $h \neq 0$ und $h(x, y, z^3 + x + 1) \in I = \langle z\rangle \cap \langle x, y\rangle$.

(4) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle xz, yz\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass $(z + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass für alle $q(x, y, z) \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ gilt, dass $(z+I, q(x, y, z)+I)$ algebraisch abhängig ist. (Hinweis: $\langle xz, yz\rangle = \langle x, y\rangle \cap \langle z\rangle$.)
  (c) Begründen Sie durch Zitieren eines passenden Satzes aus den Unterlagen, dass $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ algebraisch über dem Unterring $\mathbb{Q}[\![z + I]\!]$ ist.

(5) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle xz, yz\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass für alle $q(x, y, z) \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ gilt, dass $(x + I, y + I, q(x, y, z) + I)$ algebraisch abhängig ist.
  (b) Begründen Sie durch Zitieren eines passenden Satzes aus den Unterlagen, dass $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ algebraisch über dem Unterring $\mathbb{Q}[\![x + I, y + I]\!]$ ist.
  (c) Haben wir jetzt, im Widerspruch zu den Unterlagen, Transzendenzbasen verschiedener Kardinalität gefunden?

(6) (Bonusbeispiel) Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ so, dass

$$f_1(g_1(t_1, t_2), g_2(t_1, t_2)) = t_1,$$
$$f_2(g_1(t_1, t_2), g_2(t_1, t_2)) = t_2$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Das Polynom $J \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$ ist definiert durch

$$J(t_1, t_2) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(t_1, t_2) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(t_1, t_2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(t_1, t_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass J ein konstantes Polynom sein muss.

Montag, 22.6.09, 9:00 - 12:00, BA 9907, and 13:45 - 17:00, T 111
Linz Algebra Research Day 09
`http://www.algebra.uni-linz.ac.at/LARD09.html`