Kommutative Algebra
12. Übungsblatt für den 16. Juni 2009

(1) Sei k ein Körper, sei $V \subseteq k^n$ eine Varietät, und sei M eine Menge, die Zariski-dicht in V ist. (Es gilt also $\mathsf{V}(\mathsf{I}(M)) = V$.) Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\overline{f}|_M = 0$ auch gilt, dass $\overline{f}|_V = 0$.

(2) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle y^3 - z^2, -y^2 + xz, xy - z, x^2 - y \rangle$.

   (a) Zeigen Sie, dass $((x + y) + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $((-x^3 + z + 3) + I)$ algebraisch abhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

   (c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t_1, t_2]$ mit $f \neq 0$, sodass $\overline{f}((x + y + 1) + I, (x + z) + I) = 0 + I$.

   Hinweis: Benützen Sie Satz 6.49 über die algebraische Abhängigkeit in $k[\boldsymbol{x}]/I$ und die Eliminationseigenschaft von Gröbnerbasen.

(3) (cf. [1]) *Whitneys Schirmfläche* ist durch die Parametrisierung $x = uv, y = v, z = u^2$ gegeben.

   (a) (Über $\mathbb{R}$) Zeichnen Sie diese Fläche mit Mathematica.

   (b) (Über $\mathbb{C}$) Finden Sie die Gleichung der kleinsten Varietät, die Whitneys Schirmfläche enthält.

(4) Finden Sie eine (nichttriviale) Gleichung, die von allen Punkten im $\mathbb{R}^2$ des *Folium von Descartes* $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ erfüllt wird. Können Sie alle Lösungen der Gleichung durch die Parametrisierung erreichen?

(5) Berechnen Sie jeweils die Dimension der folgenden Varietäten $\mathsf{V}(I)$ in $\mathbb{C}^3$, indem Sie eine Teilmenge von $\{x + I, y + I, z + I\}$ mit maximaler Kardinalität finden, die algebraisch unabhängig ist.

   (a) $I = \langle y^3 - z^2, -y^2 + xz, xy - z, x^2 - y \rangle$.

   (b) $I = \langle x^2 + y^2 + 1, x + y \rangle$.

   (c) $I = \langle xy^2 - x^2 z \rangle$.

   Hinweis: Nach unserem derzeitigen Wissen würden Sie die Dimension durch Bestimmen einer unabhängigen Teilmenge maximaler Kardinalität in $\{x + \mathsf{I}(\mathsf{V}(I)), y + \mathsf{I}(\mathsf{V}(I)), z + \mathsf{I}(\mathsf{V}(I))\}$ finden. Aus Gründen, die wir in der nächsten Vorlesung besprechen, können Sie in diesem Beispiel aber I anstelle von $\mathsf{I}(\mathsf{V}(I))$ verwenden.

Literatur

[1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.