Kommutative Algebra
11. Übungsblatt für den 9. Juni 2009

(1) Finden Sie (ohne Computeralgebrasystem) eine Gröbnerbasis des Ideals

$$\langle xy^2 - 1, x - y + 3 \rangle$$

von $\mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x > y$.

(2) Bestimmen Sie (eventuell ohne Computeralgebrasystem) eine Gröbnerbasis des Ideals $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ von
$\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$.

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 2x_5 \\ f_2 &= x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 \\ f_3 &= -1x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ f_4 &= 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 5x_5. \end{aligned}$$

(Ordnen Sie die Monome lexikographisch, $x_1 > \cdots > x_5$.)

(3) Bestimmen Sie (eventuell ohne Computeralgebrasystem) eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ von $\mathbb{Q}[x]$.

$$\begin{aligned} f_1 &= x - x^3 + x^4 - 2\,x^5 + x^6 \\ f_2 &= x - 2\,x^2 + x^3 - x^4 + x^6. \end{aligned}$$

(4) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &= {t_1}^2 \\ f_2(t_1, t_2) &= {t_2}^2 \\ f_3(t_1, t_2) &= t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Sei I das Ideal von $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, t_1, t_2]$, das durch $\{x_1 - f_1(t_1, t_2), x_2 - f_2(t_1, t_2), x_3 - f_3(t_1, t_2)\}$ erzeugt wird. Berechnen Sie mithilfe der Eliminationseigenschaft von Gröbnerbasen Erzeuger von $I \cap \mathbb{R}[t_1, t_2]$ und $I \cap \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$.

(5) Seien $f_1, \ldots, f_s$ paarweise verschiedene Elemente von $k[x_1, \ldots, x_n]$, und sei $F := \{f_1, \ldots, f_s\}$. Sei $i \in \{1, \ldots, s\}$, und sei $r_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ein möglicher Rest von f_i bei einer Standarddarstellung durch $F \setminus \{f_i\}$. Sei $G := (F \setminus \{f_i\}) \cup \{r_i\}$. Zeigen Sie:

> Für alle $q \in k[\boldsymbol{x}]$ gilt: Wenn 0 ein möglicher Rest von q bei einer Standarddarstellung durch F ist, so ist 0 auch ein möglicher Rest von q bei einer Standarddarstellung durch G.

(6) Wir betrachten $M = \{(x+1)^2(x+2)^3(x^2+1)^2\}$ und studieren die Lösungsmenge in $\mathbb{Q}^1$ und in $\mathbb{C}^1$.

(a) Berechnen Sie $\mathsf{I}(\mathsf{V}(M))$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Berechnen Sie $\mathsf{I}(\mathsf{V}(M))$ über $\mathbb{C}$.