Kommutative Algebra
10. Übungsblatt für den 26. Mai 2009

(1) Sei k ein Körper, seien $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ paarweise verschieden, und sei $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$.

   (a) Zeigen Sie: Wenn F eine Gröbnerbasis für $\langle F \rangle_{k[\boldsymbol{x}]}$ ist, und $\mathrm{LT}(f_i) \in \langle \mathrm{LT}(f_1), \ldots, \mathrm{LT}(f_{i-1}), \mathrm{LT}(f_{i+1}), \ldots, \mathrm{LT}(f_s) \rangle_{k[\boldsymbol{x}]}$, dann ist auch $F \setminus \{f_i\}$ eine Gröbnerbasis für $\langle F \rangle_{k[\boldsymbol{x}]}$.

   (b) Gilt diese Behauptung auch, wenn man das Wort "Gröbnerbasis" beide Male durch "Basis" ersetzt?

(2) Seien $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g_1 &= xy - 1 \\ g_2 &= y^2 + 1 \\ g_3 &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Sei

$$s := 5x^2y^2\, g_1 - 3x^3y\, g_2 - 2xy^3\, g_3,$$

und sei $\delta := (3, 3)$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Es gilt $\mathrm{DEG}(s) < (3, 3)$. Finden Sie $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$s = c_1\, x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}\, S(g_1, g_3) + c_2\, x^{\beta_1} y^{\beta_2}\, S(g_2, g_3)$$

und jeder Summand in dieser Summe Multigrad $< (3, 3)$ hat.

(3) Sei $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Rest r bei einer Standarddarstellung $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + r$ nicht eindeutig bestimmt ist.

   (b) Finden Sie ein Polynom im Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$, das nicht das Nullpolynom ist, und das keinen Term enthält, der ein Vielfaches von xy oder y^2 ist.

(4) Seien $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Wir nehmen an, dass $f_1 = f_2 = \cdots = f_s = 0$ unlösbar ist. Sei G eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. Zeigen Sie, dass G ein konstantes Polynom ungleich 0 enthält!

(5) Sei I ein Ideal von $\mathbb{Q}[x, y]$, und sei G eine Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x > y$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Behauptungen äquivalent sind.

   (a) I enthält ein Polynom $p \neq 0$, das nur von y abhängt. (Es gilt also $\deg_x(p) = 0$.)

   (b) G enthält ein Polynom $p \neq 0$, das nur von y abhängt.

Am Freitag, dem 22. Mai 2009, entfällt die Vorlesung, und wird später nachgeholt.