Kommutative Algebra
1. Übungsblatt für den 10. März 2009

(1) (Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Zeigen Sie, dass auch

$$I + J = \{i + j \,|\, i \in I, j \in J\}$$

ein Ideal von R ist.

(2) (Faktorringe) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Seien $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$, sodass $r_1 + I = r_2 + I$ und $s_1 + I = s_2 + I$. Zeigen Sie, dass dann auch $(r_1 s_1) + I = (r_2 s_2) + I$ gilt.

(3) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S \rangle$ des Rings R gleich dem ganzen Ring R ist!
   (a) $R = \mathbb{Z}$, $S = \{105, 70, 42, 30\}$.
   (b) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(4, 3), (6, 5)\}$.
   (c) $R = \mathbb{Z}_{101}$, $S = \{[75]_{101}\}$.

(4) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S \rangle$ des Rings $\mathbb{R}[x, y]$ gleich dem ganzen Ring $\mathbb{R}[x, y]$ ist!
   (a) $S = \{xy, 2x^3 y + 3\}$.
   (b) $S = \{x^2 y, xy^2 + 1\}$.
   (c) $S = \{xy + x, 1 + y^2\}$.

(5) (Satz von Ramsey) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahlenfolge eine streng monoton fallende oder eine streng monoton steigende oder eine konstante (unendliche) Teilfolge enthält.

(6) (Dicksons Lemma) Für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ definieren wir $(a, b) \leq' (c, d)$, falls $a \leq c$ und $b \leq d$. Beweisen Sie, ohne den Satz von Ramsey zu verwenden, dass jede unendliche Folge $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}^2$ eine bezüglich $\leq'$ schwach monoton wachsende unendliche Teilfolge enthält.

(7) (Bonusbeispiel, Geometrie) Wir nennen eine Teilmenge T von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine *Viertelebene*, wenn es $m, n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x \geq m \text{ und } y \geq n\}.$$

Zeigen Sie, dass jede Vereinigung von beliebig vielen Viertelebenen eine Vereinigung von endlich vielen Viertelebenen ist.