Kommutative Algebra
9. Übungsblatt für den 27. Mai 2008

(1) Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis des Ideals $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$ von $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$.

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 2x_5 \\ f_2 &= x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 \\ f_3 &= -1x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ f_4 &= 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 5x_5. \end{aligned}$$

(Ordnen Sie die Monome lexikographisch, $x_1 > \cdots > x_5$.)

(2) Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals $I = \langle f_1, f_2\rangle$ von $\mathbb{Q}[x]$.

$$\begin{aligned} f_1 &= x - x^3 + x^4 - 2\,x^5 + x^6 \\ f_2 &= x - 2\,x^2 + x^3 - x^4 + x^6. \end{aligned}$$

(3) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &= {t_1}^2 \\ f_2(t_1, t_2) &= {t_2}^2 \\ f_3(t_1, t_2) &= t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Sei I das Ideal von $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, t_1, t_2]$, das durch $\{x_1 - f_1(t_1, t_2), x_2 - f_2(t_1, t_2), x_3 - f_3(t_1, t_2)\}$ erzeugt wird. Berechnen Sie mithilfe der Eliminationseigenschaft von Gröbnerbasen Erzeuger von $I \cap \mathbb{R}[t_1, t_2]$ und $I \cap \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$.

(4) Sei k ein Körper, und sei $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie: Wenn F eine Gröbnerbasis für $\langle F\rangle$ ist, und $\mathrm{LT}(f_i) \in \langle \mathrm{LT}(f_1), \ldots, \mathrm{LT}(f_{i-1}), \mathrm{LT}(f_{i+1}), \ldots, \mathrm{LT}(f_s)\rangle$, dann ist auch $F \setminus \{f_i\}$ eine Gröbnerbasis für $\langle F\rangle$.

(b) Gilt diese Behauptung auch, wenn man das Wort "Gröbnerbasis" beide Male durch "Basis" ersetzt?