Kommutative Algebra
8. Übungsblatt für den 20. Mai 2008

Wir besprechen am 20.5. auch das Beispiel 5 des 6.Übungsblatts.

(1) (Beweisen geometrischer Sätze) Wir betrachten den Satz von Desargues. Seien $S, A, B, C, D, E, F, H, I, J$ Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) S, A, D liegen auf einer Geraden.
   (b) S, B, E liegen auf einer Geraden.
   (c) S, C, F liegen auf einer Geraden.
   (d) A, B, H liegen auf einer Geraden.
   (e) D, E, H liegen auf einer Geraden.
   (f) A, C, J liegen auf einer Geraden.
   (g) D, F, J liegen auf einer Geraden.
   (h) B, C, I liegen auf einer Geraden.
   (i) E, F, I liegen auf einer Geraden.
   (j) E, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
   (k) F, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
   (l) F, B, E liegen nicht auf einer Geraden.
   (m) C, A, D liegen nicht auf einer Geraden.

   Dann liegen H, I, J auf einer Geraden.

   (a) Machen Sie eine Skizze für diesen Satz. (Die Skizze wird schön, wenn Sie S als Ausgangspunkt dreier Strahlen zeichnen, A näher bei S liegt als D, E näher bei S liegt als B, und C näher bei S liegt als F.)
   (b) Finden Sie ein polynomiales Gleichungssystem, dessen Unlösbarkeit diesen Satz impliziert.
   (c) Zeigen Sie dadurch, dass eine Gröbnerbasis des Systems ein konstantes Polynom enthält, dass das System tatsächlich unlösbar ist.

   Hinweis: Auf

   `http://verdi.algebra.uni-linz.ac.at/Students/`
   `s07/KommutativeAlgebra/pappus-beweis-2.m`

   finden Sie den Beweis des Satzes von Pappus.

```
Collinear [P1_, P2_, P3_] :=
   Det [{P1, P2, P3}]


AA= {0,   0, 1};
BB= {1,   0, 1};
CC= {c1,  0, 1};
DD= {d1, d2, 1};
EE= {e1, e2, 1};
FF= {f1, f2, 1};
GG= {g1, g2, 1};
HH= {h1, h2, 1};
```

```
II= {i1, i2, 1};
JJ= {j1, j2, 1};


TheSystem =
   {Collinear [AA,BB,CC],
    Collinear [DD,EE,FF],
    Collinear [AA,HH,EE],
    Collinear [DD,HH,BB],
    Collinear [DD,II,CC],
    Collinear [AA,II,FF],
    Collinear [EE,JJ,CC],
    Collinear [BB,JJ,FF],
    (* Non degenerate *)
    Collinear [AA,BB,DD] * z2 - 1,
    Collinear [AA,BB,EE] * z3 - 1,
    (* Conclusion *)
    Collinear [HH,II,JJ] * z1 - 1}

TheSystemGB = GroebnerBasis [TheSystem,
   MonomialOrder -> DegreeReverseLexicographic]
```

---

(2) Seien $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Wir nehmen an, dass $f_1 = f_2 = \cdots = f_s = 0$ unlösbar ist. Sei G eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. Zeigen Sie, dass G ein konstantes Polynom ungleich 0 enthält!

(3) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals: $\langle -1 - x\,y + y^2 + x\,y^2,\ -1 + y^2 \rangle$, lexikographische Ordnung, $x > y$.

(4) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals: $\langle -1 + a\,b + a^2\,c,\ 2 + b\,c^3 \rangle$, lexikographische Ordnung, $a > b > c$.

(5) Seien $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g_1 &= xy - 1 \\ g_2 &= y^2 + 1 \\ g_3 &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Sei

$$s := 5x^2y^2\, g_1 - 3x^3y\, g_2 - 2xy^3\, g_3,$$

und sei $\delta := (3, 3)$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Es gilt

$$\text{multideg}(s) < (3, 3).$$

Finden Sie $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$s = c_1\, x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}\, S(g_1, g_2) + c_2\, x^{\beta_1} y^{\beta_2}\, S(g_2, g_3)$$

und jeder Summand in dieser Summe Multigrad $< (3, 3)$ hat.