

Kommutative Algebra
7. Übungsblatt für den 6. Mai 2008

Wir besprechen am 6.5. auch die Beispiele 3, 4, und 5 des 6. Übungsblatts.

- (1) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}f &= x^3y^3 + 1 \\p &= 1 + 3x + 2x^2 + x^2y + x^3y \\q &= xy^2 + x^2y^2\end{aligned}$$

Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass $f = a_1p + a_2q + r$, $\text{multideg}(a_1p) \leq \text{multideg}(f)$, $\text{multideg}(a_2q) \leq \text{multideg}(f)$, und kein Term in r ein Vielfaches von $\text{LT}(p)$ oder $\text{LT}(q)$ ist.

- (2) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}f &= x^3y^2 \\p &= 1 + x^3y + 3x^2y^5 \\q &= 2x^2y + x^2y^2\end{aligned}$$

Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass $f = a_1p + a_2q + r$, $\text{multideg}(a_1p) \leq \text{multideg}(f)$, $\text{multideg}(a_2q) \leq \text{multideg}(f)$, und kein Term in r ein Vielfaches von $\text{LT}(p)$ oder $\text{LT}(q)$ ist.

- (3) Sei $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$. (Das ist das Beispiel aus der Vorlesung). Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$.

- (a) Zeigen Sie, dass der Rest r bei einer Darstellung $f = a_1f_1 + a_2f_2 + r$ wie in den vorigen Beispielen nicht eindeutig bestimmt ist.
- (b) Finden Sie ein Polynom im Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$, das nicht das Nullpolynom ist, und das keinen Term enthält, der ein Vielfaches von xy oder y^2 ist.

- (4) Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass der Rest der Division von f durch ein Hauptideal $\langle f_1 \rangle$ eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie also: Sei \leq eine zulässige Ordnung, sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $f, f_1 \in k[x_1, \dots, x_n]$, $f_1 \neq 0$. Seien $a, b, r, s \in k[x_1, \dots, x_n]$ so, dass $f = af_1 + r = bf_1 + s$. Wir nehmen an, dass kein Term von r und kein Term von s durch $\text{LT}(f_1)$ teilbar ist. Zeigen Sie $r = s$!

LITERATUR

- [1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.